

Traitement du Signal

Jean-Pierre Costa

Université d'Avignon et des pays du Vaucluse

jean-pierre.costa@univ-avignon.fr



IUP GMI

BP 1228 84911 Avignon Cedex 9

Table des matières

I	Etude des signaux continus déterministes	1
1	Notion de signaux et systèmes	2
1.1	Introduction à la théorie du signal	2
1.2	Quelques signaux élémentaires	3
1.3	Exemples de systèmes	4
1.4	Système linéaire invariant dans le temps	5
2	Energie et puissance	6
2.1	Signaux à énergie finie	6
2.2	Signaux à puissance moyenne finie	6
2.3	Energie d'interaction de 2 signaux	7
2.4	Autocorrélation, intercorrélation, convolution	8
2.4.1	Fonction d'autocorrélation d'un signal	8
2.4.2	Propriétés de la fonction d'autocorrélation	9
2.4.3	Fonction d'intercorrélation	10
2.4.4	Produit de convolution	10
2.5	Exercices : Autocorrélation	11
3	Représentation fréquentielle	12
3.1	Développement en série de Fourier d'un signal périodique	12
3.1.1	Définition	12
3.1.2	Propriétés des séries de Fourier	13
3.2	Transformée de Fourier des signaux d'énergie finie	14
3.2.1	Propriétés de la TF	15

3.2.2	Densité spectrale	16
3.2.3	Théorème de Parseval	17
3.2.4	Densité interspectrale	17
3.3	Transformée de Fourier des signaux d'énergie infinie	17
3.3.1	Les distributions	17
3.3.2	L'impulsion de Dirac	19
3.4	Transformée de Fourier d'un signal périodique	20
3.5	Exercices	21
3.5.1	Classification des signaux	21
3.5.2	Dirac	21
3.5.3	Transformée de Fourier	22
4	Filtrage	23
4.1	Filtrage des signaux à temps continu	23
4.1.1	Filtre linéaire continu et invariant dans le temps	23
4.1.2	Filtrage fréquentiel	24
4.1.3	Puissance et énergie des signaux avant et après filtrage	25
4.1.4	Fenêtrage temporel	26
4.1.5	Analyse blocs-diagrammes	27
4.1.6	Filtre sans distorsion	27
4.1.7	Exercices	28
4.2	Transmission de signaux	30
4.2.1	Signaux à bande limitée	30
4.2.2	Transmission en bande de base	31
4.2.3	Transmission par modulation	31
4.2.4	Définition d'un filtre de Hilbert	31
4.2.5	Signal analytique associé à un signal réel	32
4.2.6	Enveloppe complexe des signaux bande étroite	33
4.2.7	Amplitude et phase instantanées d'un signal bande étroite	34

II	Etude des signaux discrets	35
1	L'échantillonnage	36
1.1	Notion d'échantillonnage	36
1.2	Echantillonnage parfait	37
1.2.1	Définition	37
1.2.2	Théorème d'échantillonnage en bande de base	38
1.3	Echantillonnage régulier	38
1.4	Filtre anti-repliement	39
1.5	Interpolation par le bloqueur d'ordre 0	40
2	Signaux déterministes à temps discret	41
2.1	Signaux à temps discret élémentaires	41
2.2	Propriétés des signaux à temps discret	42
2.3	Transformée de Fourier des signaux à temps discret	43
2.3.1	Définition	43
2.3.2	Exemple	44
2.4	Propriétés de la transformée de Fourier	44
2.5	Transformée de Fourier discrète d'un signal discret	45
2.5.1	Remarques	46
2.5.2	Exemple	47
2.6	Fenêtres de pondération	47
2.6.1	Fenêtre rectangulaire	48
2.6.2	Fenêtre de Hamming	48
2.6.3	Fenêtre de Kaiser	49
2.6.4	Exemple	50
2.7	La transformée de Fourier rapide	50
III	Etude des signaux aléatoires	52
1	Rappels sur les probabilités	53
1.1	Introduction	53

1.2	Probabilités	53
1.2.1	Définitions	53
1.2.2	Définitions complémentaires	54
1.2.3	Algèbre des événements	54
1.2.4	Probabilité d'un événement	54
1.3	Variables aléatoires réelles	57
1.3.1	Histogramme	57
1.3.2	Fonction de répartition	57
1.3.3	Densité de probabilité	59
1.4	Lois de répartition particulières	61
1.4.1	Loi de Bernoulli x	61
1.4.2	Loi de poisson	61
1.4.3	Loi uniforme	62
1.4.4	Loi normale ou gaussienne	63
1.5	Moyennes statistiques	64
1.5.1	Espérance mathématique	65
1.5.2	Fonction d'une variable aléatoire	65
1.5.3	Fonction de deux variables aléatoires	65
1.5.4	Remarques	66
1.5.5	Moments et variance	66
1.5.6	Fonction caractéristique	67
1.6	Moments conjoints et covariance	68
1.6.1	Répartition conjointe	68
1.6.2	Répartition marginale	68
1.6.3	Répartition conditionnelle	69
1.6.4	Variables aléatoires indépendantes	69
1.6.5	Corrélation	70
1.6.6	Covariance	70
1.6.7	Coefficient de corrélation	70
1.6.8	Evénements orthogonaux	71
1.6.9	Variables conjointement gaussiennes	71

1.7	Changement de variables	71
1.7.1	Fonction de variables aléatoires	71
1.7.2	Détermination de la densité de probabilité	72
1.7.3	Formule de changement de variables	72
1.8	Somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes	74
1.9	Exercices	74
1.9.1	Variables aléatoires, fonctions de répartition et densités	74
1.9.2	Moyennes statistiques	75
2	Signaux aléatoires	76
2.1	Introduction	76
2.2	Les moments temporels, les relations de base	77
2.2.1	Moyenne temporelle	77
2.2.2	Autocorrélation temporelle	77
2.3	Caractéristiques statistiques d'un processus aléatoire	78
2.3.1	Moyenne statistique	78
2.3.2	Autocorrélation, autocovariance statistiques	78
2.4	Stationnarité, Ergodicité	78
2.4.1	Stationnarité au sens strict	78
2.4.2	Processus aléatoire stationnaire au second ordre	79
2.4.3	Processus ergodique	79
2.5	Corrélation	80
2.5.1	Autocorrélation statistique	80
2.5.2	Intercorrélation statistique	80
2.5.3	Autocovariance	81
2.5.4	Intercovariance	81
2.6	Analyse spectrale des processus aléatoires	81
2.6.1	Densité spectrale de puissance	81
2.6.2	Le bruit blanc $b(t)$	82
2.6.3	Le bruit coloré	82
2.7	Processus aléatoires particuliers	82

2.7.1	Séquences indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.)	82
2.7.2	Processus aléatoire gaussien	83
2.8	Filtrage des processus aléatoires	84
2.8.1	Introduction	84
2.8.2	Les relations en discret	85
2.8.3	Filtre linéaire invariant dans le temps	86
2.9	Exercices	87
2.9.1	Stationnarité	87
2.9.2	Filtrage	87
2.9.3	Processus aléatoires particuliers	88
3	Identification paramétrique	89
3.1	La transformée en \mathbf{z}	89
3.1.1	Définition	89
3.1.2	Transformée en \mathbf{z} unilatérale	90
3.1.3	Fonction de transfert	90
3.1.4	Systèmes définis par une équation aux différences	91
3.1.5	Filtres à réponse impulsionnelle finie	92
3.1.6	Exemples	93
3.1.7	Filtres à réponse impulsionnelle infinie	95
3.1.8	Comparaison entre les filtres RIF et RII	96
3.2	Processus aléatoire	96
3.2.1	Processus MA	96
3.2.2	Processus AR	97
3.2.3	Processus ARMA	99
3.3	Application à la prédiction linéaire	100
3.3.1	Définitions	100
3.3.2	Exemple	101
4	Éléments de la théorie de l'estimation	105
4.1	Propriétés des estimateurs	105
4.1.1	Introduction	105

4.1.2	Biais et variance	105
4.1.3	Exemple : estimateur de la moyenne	106
4.2	Méthodes d'estimation de paramètres de signaux	107
4.2.1	Méthode du maximum de vraisemblance	107
4.2.2	Méthode des moindres carrées	109

Première partie

Etude des signaux continus
déterministes

CHAPITRE 1 *Notion de signaux et systèmes*

1.1 Introduction à la théorie du signal

La théorie du signal a pour objet l'étude des signaux et des systèmes qui les transmettent. L'observation d'un phénomène permet d'extraire certaines quantités qui dépendent du temps (de l'espace, d'une fréquence, ou d'une autre variable). Ces quantités, supposées mesurable, seront appelées des signaux. Elles correspondent, en mathématiques, à la notion de fonction (d'une ou plusieurs variables : temps, espace, etc.) qui en constitue donc une modélisation. Dans le cours de traitement du signal nous verrons que la notion de distribution est une modélisation à la fois plus générale et plus satisfaisante des signaux.

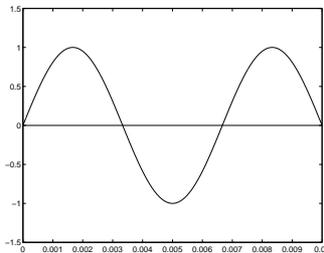
On peut citer quelques exemples de signaux :

- intensité d'un courant électrique,
- position d'un mobile, repéré par sa position au cours du temps, $M = M(t)$,
- niveaux de gris des points d'une image $g(i,j)$,
- un son,
- ...

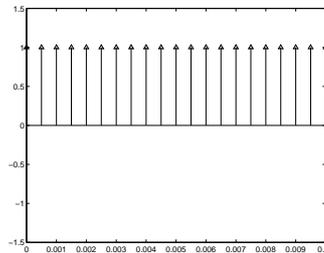
Il existe plusieurs types de représentations pour les signaux. En effet,

- on peut modéliser un signal de manière déterministe ou aléatoire.
- Dans le cas où la variable est continue, le signal est analogique ($x = x(t)$); dans le cas où elle est discrète, le signal est discret ($x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$). Un signal discret est le plus souvent le résultat d'une discrétisation (échantillonnage) d'un signal analogique.

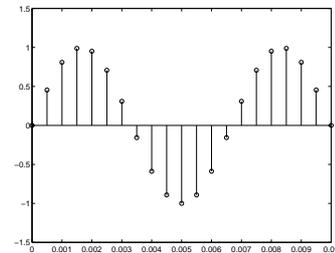
- Les valeurs $x = x(t)$ du signal seront considérées comme des valeurs exactes, réelles ou complexes.



Signal analogique



Peigne de dirac



Signal échantillonné

Les signaux sont véhiculés à travers un système de transmission (ou canal de transmission). D'une manière générale, on appelle système toute entité, permettant de distinguer des signaux d'entrée et des signaux de sortie.

On distingue

- Les systèmes analogiques dont les signaux d'entrée–sortie sont analogiques.
- Les systèmes discrets dont les signaux d'entrée–sortie sont discrets.

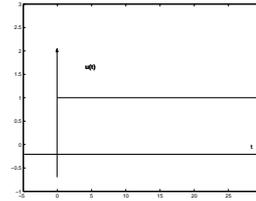
On passe d'un signal discret à un signal analogique ou inversement, par des convertisseurs :

- convertisseur analogique – numérique, comme par exemple , l'échantillonneur,
- convertisseur numérique – analogique qui recompose un signal analogique à partir d'un signal numérique. Par exemple le bloqueur, qui conserve la dernière valeur du signal jusqu'à l'obtention de la valeur suivante.

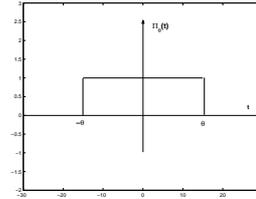
1.2 Quelques signaux élémentaires

1. Echelon unité (Heaviside) : on le note $u(t)$ et il est défini par
Ce signal modélise l'établissement instantané d'un régime constant.
2. La fonction porte, notée $\Pi_{\theta}(t)$ est définie par

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$



$$\Pi_{\theta}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{\theta}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad \theta > 0 \text{ donné}$$



3. Signal sinusoïdal pur : c'est un signal de la forme

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

ou A est l'amplitude du signal, ω la pulsation et φ la phase initiale.

1.3 Exemples de systèmes

1. L'amplificateur idéal : $y(t) = k x(t)$ avec k une constante fixée.
2. Ligne à retard $y(t) = x(t - a)$ avec k une constante réelle.
3. Circuit RC Ce système est régi par une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

$$e(t) = s(t) + RC s'(t)$$

La fonction de transfert

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + RC P}$$

1.4 Système linéaire invariant dans le temps

Un système est dit linéaire si pour les entrées $x_1(t)$ et $x_2(t)$ respectivement on obtient les sorties $y_1(t)$ et $y_2(t)$ alors pour l'entrée $a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ on obtient $a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$ avec $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$.

Un système est dit invariant dans le temps si son comportement se reproduit de façon identique au cours du temps. Si pour une entrée $x(t)$ on a une sortie $y(t)$, alors pour $x(t - \tau)$ on a $y(t - \tau)$.

Un système est dit instantané ou sans mémoire si la relation entrée-sortie est du type $y(t) = g[x(t)]$.

Un système est dit stable si la réponse à toute entrée bornée est elle-même bornée.

Un système est continu ssi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t) & \quad y_n(t) = h(t) * x_n(t) \\ & \text{avec} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = y(t) & \quad y(t) = h(t) * x(t) \end{aligned}$$

ou $H(p)$ (transformée de Laplace) est la fonction de transfert du système.

On appelle filtre un système linéaire continu et invariant dans le temps.

CHAPITRE 2 *Energie et puissance*

2.1 Signaux à énergie finie

Lorsqu'on étudie les propriétés des signaux, il est important d'étudier l'énergie d'un signal. Par définition, l'énergie E (exprimée en Joules) d'un signal à temps continu $s(t)$ est

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt$$
$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s^*(t) dt$$

Si cette intégrale est finie on parle de signaux à énergie finie. La quantité $p(t) = s(t)s^*(t)$ s'appelle la puissance instantanée. Les signaux de durée limitée sont à énergie finie.

2.2 Signaux à puissance moyenne finie

On définit, si elle existe, la puissance moyenne par

$$p = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} s(t)s^*(t) dt$$

Si cette limite est finie, on parle de signaux à puissance moyenne finie. Dans le cas des signaux périodiques de période T_0 , la puissance moyenne du signal correspond à la puissance

moyenne sur une période du signal.

$$p = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} s(t)s^*(t) dt$$

p s'exprime en Watts (Joules par seconde).

Remarques:

- un signal d'énergie finie ($E < \infty$) à une puissance moyenne nulle,
- un signal d'énergie $E = 0$ est considéré comme égal à 0 (signal nul),
- 2 signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont égaux si l'énergie de leur différence est nulle $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt = 0$

Tous les signaux physiques sont à énergie finie mais on les modélise mathématiquement comme des signaux éternels dont on observe une certaine durée.

Signaux nuls	$E = 0$	
Signaux à énergie finie	$E < \infty$ $P = 0$	signaux de module fini et de support borné
Signaux à puissance moyenne finie	$E = \infty$ $P < \infty$	signaux périodiques
Autres signaux	$E = \infty$ $P = \infty$	$s(t) = t$, bruit blanc, dirac

2.3 Energie d'interaction de 2 signaux

Prenons comme exemple 2 sources ponctuelles S_1 et S_2 produisant en un point de l'espace une onde de pression $s_1(t)$ et $s_2(t)$. Lorsque ces 2 sources agissent simultanément, l'onde de pression en ce point est $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$. Si on veut calculer l'énergie de $s(t)$, on obtient

alors :

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s^*(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)s_1^*(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t)s_2^*(t) dt + \\
 &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)s_2^*(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t)s_1^*(t) dt \\
 E &= E_1 + E_2 + E_{12} + E_{21}
 \end{aligned}$$

On a l'énergie de chacune des 2 ondes plus des termes croisés relatifs à l'interaction des 2 signaux.

On définit donc

- la puissance instantanée d'interaction de 2 signaux par:

$$P_{xy}(t) = x(t)y^*(t)$$

On remarque que $P_{yx}(t) = P_{xy}^*(t)$,

- l'énergie d'interaction de 2 signaux

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) dt$$

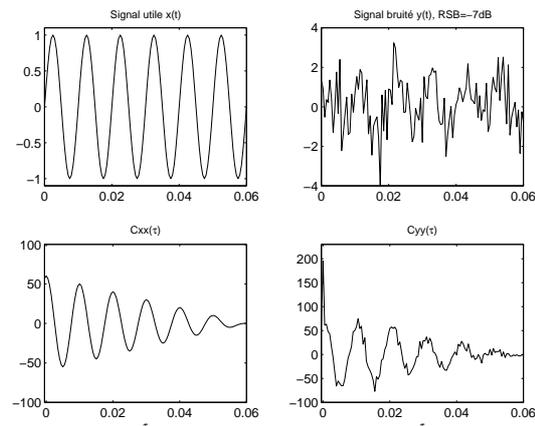
avec $|E_{xy}|^2 \leq E_x E_y$

2.4 Autocorrélation, intercorrélation, convolution

2.4.1 Fonction d'autocorrélation d'un signal

- à énergie finie

$$C_{ss}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s^*(t - \tau) dt$$



Autocorrélation d'une sinusoïde et d'une sinusoïde bruitée

- à puissance moyenne finie

$$C_{ss}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t) s^*(t - \tau) dt$$

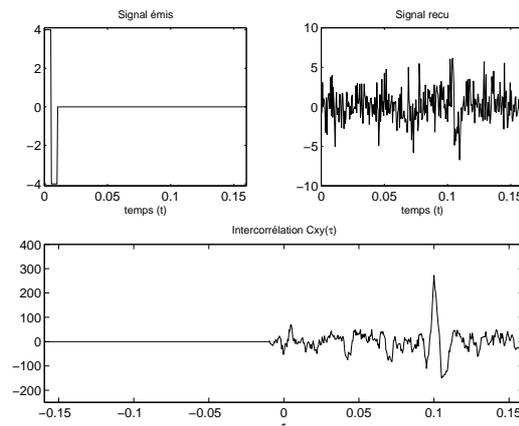
- périodique

$$C_{ss}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} s(t) s^*(t - \tau) dt$$

La fonction d'autocorrélation traduit la similitude d'un signal au niveau de la forme en fonction d'un décalage temporel. C'est une mesure de la ressemblance du signal avec lui-même au cours du temps. Dans le cas d'un signal périodique, la fonction d'autocorrélation le sera aussi et permettra de détecter cette périodicité.

2.4.2 Propriétés de la fonction d'autocorrélation

- $C_{ss}(0) = E_s \geq 0$: l'autocorrélation est maximum en 0 et correspond à l'énergie du signal.
- Dans le cas où $s(t)$ est un signal réel, la fonction d'autocorrélation est paire $C_{ss}(\tau) = C_{ss}(-\tau)$.
- Dans le cas où $s(t)$ est un signal complexe, la fonction d'autocorrélation est à symétrie hermitienne $C_{ss}(\tau) = C_{ss}^*(-\tau)$.



Exemple d'une impulsion radar

2.4.3 Fonction d'intercorrélation

– à énergie finie

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t - \tau) dt$$

– à puissance moyenne finie

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)y^*(t - \tau) dt$$

Puisque $C_{xy}(\tau)$ est une mesure de similitude, elle atteint son maximum pour une valeur de τ lorsque la similitude est la plus grande.

2.4.4 Produit de convolution

Comme on le verra dans le chapitre 3, le produit de convolution est un outil très pratique pour le calcul de la réponse d'un système linéaire et invariant dans le temps. En effet la réponse $y(t)$ d'un tel système à une entrée quelconque $x(t)$ s'exprime comme le produit de convolution de $x(t)$ avec la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système, c'est à dire :

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(t - u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t - u) du$$

2.5 Exercices : Autocorrélation

Soit la fonction $x(t) = S_0 e^{-i\omega_0 t}$

1. Montrer que cette fonction est périodique de période T_0 ($x(t + T_0) = x(t)$).
2. Calculer la fonction d'autocorrélation $C_{xx}(\tau)$.
3. Vérifier les propriétés de la fonction d'autocorrélation suivantes :
 - (a) $C_{xx}(0)$ = Puissance moyenne,
 - (b) $C_{xx}(\tau) = C_{xx}^*(-\tau)$: symétrie hermitienne,
 - (c) $|C_{xx}| \leq C_{xx}(0)$: la fonction est maximum en 0,
 - (d) comme $x(t)$ est périodique alors $C_{xx}(\tau)$ est périodique.

Soit la fonction $x(t) = S_0 e^{-\alpha t} u(t)$

avec $\alpha > 0$ et $u(t) = 1$ pour $t \geq 0$ et 0 ailleurs

1. Représenter sur le même graphe l'allure de $x(t)$ et de $x(t - t_0)$.
2. Montrer que la fonction d'autocorrélation $C_{xx}(\tau)$ est

$$C_{xx}(\tau) = \frac{S_0^2}{2\alpha} e^{-\alpha\tau}$$

3. Vérifier les propriétés de la fonction d'autocorrélation (3a), (3b), (3c)
4. Mêmes questions pour la fonction porte $\Pi_\theta(t)$.

CHAPITRE 3 *Représentation fréquentielle*

3.1 Développement en série de Fourier d'un signal périodique

3.1.1 Définition

L'idée de base d'un développement en série de Fourier est qu'un signal périodique peut être décomposé en une somme de signaux harmoniques, c'est à dire de signaux dont la fréquence est multiple d'une fréquence fondamentale.

Soit $s(t)$ une fonction continue, périodique (T_0). On peut décomposer ce signal en une somme infinie d'exponentielles complexes de fréquence multiple de $f_0 = 1/T_0$, de sorte que

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_k e^{2j\pi k \frac{t}{T_0}}$$

$$S_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} s(t) e^{-2j\pi k \frac{t}{T_0}} dt$$

ou les S_k représentent les coefficients de Fourier. La suite des coefficients complexes S_k constitue le spectre de raies discret du signal périodique $s(t)$.

On peut également décomposer $s(t)$ suivant :

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k2\pi \frac{t}{T_0}) + b_k \sin(k2\pi \frac{t}{T_0})$$

avec a_0 correspondant à la valeur moyenne du signal sur une période

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} s(t) dt$$

et

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} s(t) \cos(k2\pi \frac{t}{T_0}) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} s(t) \sin(k2\pi \frac{t}{T_0}) dt$$

3.1.2 Propriétés des séries de Fourier

Liens entre les coefficients s_k , a_k et b_k

Pour $k > 0$,

S_0	$=$	a_0	a_0	$=$	S_0
S_k	$=$	$\frac{a_k - j b_k}{2}$	a_k	$=$	$S_k + S_{-k}$
S_{-k}	$=$	$\frac{a_k + j b_k}{2}$	b_k	$=$	$j(S_k - S_{-k})$

Quelques propriétés

On a vu que la composante $a_0 = S_0$ de $s(t)$ est appelée composante continu. C'est la valeur moyenne de $s(t)$ sur une période.

La fréquence $f_0 = \frac{1}{T_0}$ est la fréquence fondamentale et les composantes a_1 et b_1 constituent l'amplitude du fondamental. Les fréquences $f_k = k/T_0$ pour $k > 1$ constituent les harmoniques d'ordre k (1er harmonique $f_2 = 2$ fois le fondamental).

De plus,

- Si $s(t)$ est paire alors $b_k = 0 \forall k$.
- Si $s(t)$ est impaire alors $a_k = 0 \forall k$.
- Si $s(t)$ est réelle, a_k , b_k sont réels et $S_k = S_k^*$.
- Si $s(t)$ est complexe, a_k , b_k sont complexes.

Egalité de Parseval

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} |s(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |S_k|^2$$

ou chaque terme $|S_k|^2$ représente la puissance moyenne apportée par la composante $e^{j2\pi kt/T_0}$

3.2 Transformée de Fourier des signaux d'énergie finie

Soit un signal $s(t)$ à temps continu d'énergie finie E , la transformée de Fourier $S(f)$ de $s(t)$ est définie par :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$S(f)$ est aussi appelé spectre complexe (ou tout simplement spectre) et correspond à la représentation fréquentielle du signal $s(t)$.

La formule d'inversion est donnée par :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df$$

Une condition d'existence suffisante mais pas nécessaire est que $s(t)$ soit une fonction sommable, c'est à dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < \infty$$

alors

$$|S(f)| < \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < \infty$$

3.2.1 Propriétés de la TF

On va voir comment une opération sur $s(t)$ se traduit par une autre opération dans l'espace des fréquences sur $S(f)$.

$$1. \text{ Linéarité: } s_1(t) \xrightarrow{\text{TF}} S_1(f), s_2(t) \xrightarrow{\text{TF}} S_2(f),$$

$$\lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t) \xrightarrow{\text{TF}} \lambda_1 S_1(f) + \lambda_2 S_2(f) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

$$2. \text{ Translation en temps: } s(t - t_0) \xrightarrow{\text{TF}} e^{-j2\pi f t_0} S(f)$$

$$3. \text{ Translation en fréquence: } S(f - f_0) = \xrightarrow{\text{TF}} [s(t)e^{j2\pi f_0 t}], \text{ une translation en fréquence correspond à une modulation en temps.}$$

4. Dilatation en temps: $y(t) = s(at)$ avec $a > 0$, $Y(f) = \frac{1}{a} S(f/a)$. Une dilatation ($0 < a < 1$) de l'échelle des temps correspond à une compression ($\frac{1}{a} > 1$) de l'échelle des fréquences et inversement.

$$5. \text{ Inversion du temps: } s(-t) \xrightarrow{\text{TF}} S(-f),$$

$$6. \text{ Conjugaison du signal: } s^*(t) \xrightarrow{\text{TF}} S^*(-f),$$

7. Formes particulières :

$s(t)$ réelle	\rightarrow	$S(f)$ symétrie hermitienne
$s(t)$ réelle paire	\rightarrow	$S(f)$ réelle paire
$s(t)$ réelle	\rightarrow	$S(f)$ imaginaire impaire
$s(t)$ imaginaire paire	\rightarrow	$S(f)$ imaginaire paire
$s(t)$ imaginaire impaire	\rightarrow	$S(f)$ réelle impaire

8. Convolution en temps: on appelle produit de convolution de 2 signaux d'énergie finie

$x(t)$ et $y(t)$ le signal $z(t)$ défini par :

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u) du = y(t) * x(t)$$

$$z(t) \xrightarrow{\text{TF}} Z(f) = X(f)Y(f)$$

Cette propriété de convolution est la plus fondamentale pour les applications de l'analyse de Fourier notamment pour le filtrage linéaire.

$$9. \text{ Convolution en fréquence: } z(t) = x(t)y(t) \xrightarrow{\text{TF}} Z(f) = X(f) * Y(f)$$

La transformée de Fourier transforme convolution en multiplication et multiplication en convolution.

3.2.2 Densité spectrale

La densité spectrale Γ_{ss} est définie comme étant la TF de la fonction d'autocorrélation C_{ss} .

$$\Gamma_{ss}(f) = \text{TF}[C_{ss}(\tau)] = S(f)S^*(f) = |S(f)|^2$$

Démonstration :

$$C_{ss}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s^*(t-\tau) dt$$

On pose : $x(t) = s(t)$ et $y(t) = s^*(-t)$, alors

$$C_{ss}(\tau) = x(\tau) * y(\tau)$$

d'où

$$\Gamma_{ss}(f) = \text{TF}[C_{ss}(\tau)] = S(f)S^*(f) = |S(f)|^2$$

On peut dire que $\Gamma_{ss}(f)$ est une densité spectrale d'énergie puisque son intégrale donne l'énergie totale du signal.

3.2.3 Théorème de Parseval

On obtient par transformé de Fourier inverse, l'égalité de Parseval :

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df = C_{ss}(0)$$

On a l'expression de l'énergie d'un signal dans le domaine du temps ou dans le domaine des fréquences.

3.2.4 Densité interspectrale

De la même manière on peut définir la densité interspectrale comme étant la TF de la fonction intercorrélation. On a alors :

$$\Gamma_{xy}(f) = \text{TF}[C_{xy}(\tau)] = X(f)Y^*(f)$$

3.3 Transformée de Fourier des signaux d'énergie infinie

3.3.1 Les distributions

Le modèle mathématique

Une fonction est une application qui à tout nombre d'un ensemble de départ fait correspondre un nombre d'un espace d'arrivée :

$$f : T \longrightarrow f(t)$$

A toute fonction v appartenant à l'espace vectoriel des fonctions définies sur R^n , indéfiniment dérivables et à support borné, la distribution \mathbf{D} associe un nombre complexe $\mathbf{D}(v)$, qui sera aussi noté $\langle \mathbf{D}, v \rangle$ avec les propriétés suivantes :

- $\mathbf{D}(v_1 + v_2) = \mathbf{D}(v_1) + \mathbf{D}(v_2)$,
- $\mathbf{D}(\alpha v) = \alpha \mathbf{D}(v)$, où α est un scalaire.

Par exemple, si $f(t)$ est une fonction sommable sur tout ensemble borné, elle définit une distribution \mathbf{D}_f par :

$$\langle \mathbf{D}, v \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)v(t) dt \quad (3.1)$$

Dérivation des distribution

On définit la dérivée $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ d'une distribution \mathbf{D} par la relation :

$$\langle \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, v \rangle = - \langle \mathbf{D}, \frac{\partial v}{\partial t} \rangle$$

Soit par exemple, en utilisant l'équation 3.1, on peut déterminer la dérivée de la fonction $u(t)$ de Heaviside, ou échelon unité (0 si $t < 0$ et 1 si $t \geq 0$),

$$\langle \frac{\partial \mathbf{D}_u}{\partial t}, v \rangle = - \langle \mathbf{D}_u, \frac{\partial v}{\partial t} \rangle = - \int_0^{+\infty} 1 v'(t) dt = v(0) = \langle \delta, v \rangle$$

Il en résulte que la discontinuité de $u(t)$ apparaît sous la forme d'un dirac unitaire dans sa dérivée. Cet exemple illustre un intérêt pratique considérable de la notion de distribution, qui permet d'étendre aux fonctions discontinues un certain nombre de concepts et de propriétés des fonctions continues.

Par généralisation, si f est continûment dérivable et ϕ une fonction test à support bornée, alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\phi(x)dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x)dx \quad (3.2)$$

Transformée de Fourier d'une distribution

Par définition la transformée de Fourier d'une distribution \mathbf{D} est une distribution notée \mathbf{FD} telle que :

$$\langle \mathbf{FD}, v \rangle = \langle \mathbf{D}, \mathbf{F}v \rangle \quad (3.3)$$

3.3.2 L'impulsion de Dirac

Définition

Ce n'est pas une fonction mais une distribution. La distribution de dirac δ est définie par

$$\langle \mathbf{D}, v \rangle = v(0) \quad (3.4)$$

Par extension la distribution de dirac au point réel τ est définie par :

$$\langle \delta(t - \tau), v \rangle = v(\tau) \quad (3.5)$$

On peut définir δ comme la limite de la fonction $s_\varepsilon(t)$ ($\int_{-\infty}^{+\infty} s_\varepsilon(t) dt = 1$) définie par :

$$s_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \Pi_{\varepsilon/2}(t)$$

et le signal porte Π_T est défini comme suit

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| < T \\ 0 & \text{pour } |t| > T \end{cases}$$

Donc $\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s_\varepsilon(t)$ avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

On représente, par convention le dirac par une flèche de poids=1 représentant l'aire. Si on calcule l'énergie de $s_\varepsilon(t)$ on obtient :

$$E_{s_\varepsilon(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_\varepsilon(t)^2 dt = \frac{1}{\varepsilon}$$

donc $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{s_\varepsilon(t)} = \infty$. Le dirac a une énergie infinie et n'est pas périodique, **ce n'est pas un signal réalisable physiquement**. On admettra que $\delta(t)$ est paire.

Calcul de la transformée de Fourier

La TF de $s_\varepsilon(t)$ est $\text{sinc}(f\varepsilon)$ par conséquent

$$\text{TF}[\delta(t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\text{sinc}(f\varepsilon)] = 1 \quad (3.6)$$

On admet que les propriétés fondamentales de la transformée de Fourier entre la convolution et produit de fonctions s'appliquent aux distributions.

Quelques propriétés

- $v(t) \delta(t) = v(0) \delta(t)$
- $v(t) \delta(t - t_0) = v(t_0) \delta(t - t_0)$

Un signal de durée infinie a un spectre en $f = 0$. Un signal de durée nulle a un spectre infini ou toutes les fréquences ont même contribution.

- $\text{TF}^{-1} [\delta(f)] = 1,$
- $\text{TF} [\delta(t - t_0)] = e^{-j2\pi f t_0},$
- $\text{TF} [e^{j2\pi f_0 t}] = \delta(f - f_0),$
- $\text{TF} [A \cos(\omega_0 t)] = \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \delta(f + f_0),$
- $\delta(t - t_0) * \delta(t) = \delta(t - t_0),$
- $\delta(t - t_0) * \delta(t - t_1) = \delta(t - t_0 - t_1),$
- $v(t) * \delta(t) = v(t),$
- $v(t) * \delta(t - t_0) = v(t - t_0),$
- $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

3.4 Transformée de Fourier d'un signal périodique

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n f_0) e^{j2\pi n f_0 t}$$

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n f_0) \delta(f - n f_0)$$

et les coefficients de Fourier sont donnés par :

$$S(nf_0) = S_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} s(t) e^{-j2\pi f_0 n t} dt$$

Remarque : la transformé de Fourier d'un peigne de dirac(Υ) est un peigne de dirac,

$$\begin{aligned} \Upsilon(t) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0) \\ \text{TF}[\Upsilon(t)] = \Upsilon(f) &= \frac{1}{T_0} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - n/T_0) \end{aligned}$$

3.5 Exercices

3.5.1 Classification des signaux

Tracer les signaux suivants et déterminer s'il s'agit de signaux à énergie finie, à puissance finie ou n'appartenant à aucune de ces deux catégories. La fonction $u(t)$ étant la fonction de Heaviside.

- $x(t) = A \sin(t)$, pour $-\infty < t < +\infty$,
- $x(t) = A[u(t + \tau) - u(t - \tau)]$, avec $\tau > 0$,
- $x(t) = e^{-\alpha|t|}$, avec $\alpha > 0$,
- $x(t) = u(t)$,
- $x(t) = t u(t)$.

3.5.2 Dirac

1. En utilisant la relation d'équivalence suivante :

soit $g(t)$ et $f(t)$ deux fonctions, il existe une relation d'équivalence qui énonce que

$$g(t) = f(t) \text{ si et seulement si :}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(t)dt \quad (3.7)$$

vérifier la propriétés suivante: $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$.

2. Evaluer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} & - \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 + \cos(\pi t)) \delta(t - 1) dt, \\ & - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} \delta(2t - 2) dt, \\ & - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t} \delta'(t) dt. \end{aligned}$$

3.5.3 Transformée de Fourier

1. Calculer et représenter la transformée de Fourier du signal porte ($\Pi_\theta(t)$) défini par :

$$\Pi_\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -\frac{\theta}{2} \leq t \leq \frac{\theta}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Rmq : $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

2. Calculer et représenter la transformée de Fourier de $\Pi_\theta(t - \tau)$

3. On souhaite calculer la transformée de Fourier du signal suivant :

$$s(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t) & \text{pour } \tau \frac{-\theta}{2} \leq t \leq \tau \frac{\theta}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

(a) Tracer $s(t)$.

(b) Sachant que la TF d'un produit ($f(t).g(t)$) est égale au produit de convolution des TF ($F(f) * G(f)$) calculer et représenter la TF de $s(t)$.

CHAPITRE 4 *Filtrage*

4.1 Filtrage des signaux à temps continu

4.1.1 Filtre linéaire continu et invariant dans le temps

Un système est dit linéaire si pour les entrées $x_1(t)$ et $x_2(t)$ respectivement on obtient les sorties $y_1(t)$ et $y_2(t)$ alors pour l'entrée $a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ on obtient $a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$ avec $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$.

Un système est dit invariant dans le temps si son comportement se reproduit de façon identique au cours du temps. Si pour une entrée $x(t)$ on a une sortie $y(t)$, alors pour $x(t - \tau)$ on a $y(t - \tau)$.

Un système est dit instantané ou sans mémoire si la relation entrée–sortie est du type $y(t) = g[x(t)]$.

Un système est dit stable si la réponse à toute entrée bornée est elle-même bornée.

Un système est continu ssi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t) \quad y_n(t) = h(t) * x_n(t)$$

avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = y(t) \quad y(t) = h(t) * x(t)$$

ou $H(p)$ (transformée de Laplace) est la fonction de transfert du système.

On appelle filtre un système linéaire continu et invariant dans le temps.

4.1.2 Filtrage fréquentiel

On appelle filtrage fréquentiel, l'opération consistant à prélever, supprimer, ou seulement atténuer tout ou une partie des composantes fréquentielles d'un signal.

Par définition $y(t) = h(t) * x(t)$,

- $H(f)$ s'appelle la réponse en fréquences du filtre
- $|H(f)|$ s'appelle le gain en fréquences du filtre
- $\text{Arg}(H(f))$ s'appelle la phase du filtre.

La relation fondamentale des filtres est donnée par,

$$Y(f) = H(f) X(f) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X(f) = \text{TF} [x(t)] \\ X(f) = \text{TF} [x(t)] \end{cases}$$

on appelle $h(t) = \text{TF}^{-1}[H(f)]$ la réponse impulsionnelle du filtre. En effet, par TF inverse

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t') x(t - t') dt'$$

dans le cas où $x(t) = \delta(t)$, $y(t) = h(t) * \delta(t) = h(t)$, d'où le nom de réponse impulsionnelle pour $h(t)$. $h(t)$ ne peut pas commencer avant 0 c'est à dire précéder la cause. Un filtre est réalisable si sa réponse impulsionnelle $h(t)$ est causale ($h(t) = 0$ pour $t < 0$) et s'il est stable. On rappelle qu'un filtre est stable ssi à toute entrée bornée correspond une sortie bornée, $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$.

4.1.3 Puissance et énergie des signaux avant et après filtrage

Filtrer un signal revient aussi à lui prélever une partie de son énergie. Il est important de considérer la puissance et l'énergie des signaux avant et après filtrage dans le temps et en fréquence.

$$\begin{aligned} Y(f) &= H(f) X(f) \\ |Y(f)|^2 &= |H(f)|^2 |X(f)|^2 \end{aligned}$$

Or on a vu que $|X(f)|^2 = \Gamma_{xx}(f)$ correspond à la densité spectrale d'énergie (signaux à énergie finie), d'où :

$$\Gamma_{yy}(f) = |H(f)|^2 \Gamma_{xx}(f)$$

par TF inverse on montre que :

$$C_{yy}(\tau) = C_{hh}(\tau) * C_{xx}(\tau)$$

avec $C_{hh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)h^*(t - \tau) dt$.

- Si $x(t)$ est à énergie finie, $\Gamma_{xx}(f)$ est la densité spectrale d'énergie,

$$\begin{aligned} C_{xx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{xx}(f)e^{j2\pi f\tau} df \\ C_{xx}(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{xx}(f) df = E_x \end{aligned}$$

- Si $x(t)$ est à puissance moyenne finie, $\Gamma_{xx}(f)$ est la densité spectrale de puissance,

$$\begin{aligned} C_{xx}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x^*(t - \tau) dt \\ C_{xx}(0) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x^*(t) dt = P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{xx}(f) df \end{aligned}$$

- Si $x(t)$ est un signal périodique de période T_0 , $\Gamma_{xx}(f)$ est la densité spectrale de puis-

sance, et $C_{xx}(\tau)$ est de période T_0 .

$$\Gamma_{xx}(f) = \text{TF} [C_{xx}(\tau)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

De même que le spectre $X(f)$ d'un signal périodique est une suite infinie de diracs de poids X_k complexes, la densité spectrale de puissance est une suite infinie de diracs de poids réels $|X_k|^2$.

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

4.1.4 Fenêtrage temporel

On appelle fenêtrage temporel, le fait de multiplier un signal de durée infinie par une fenêtre pour obtenir un signal à durée finie correspondant à un signal physique.

La fenêtre la plus simple est la fenêtre rectangulaire mais il en existe bien d'autres. L'effet de cette fenêtre temporelle sur le signal et sur son spectre est très important. En effet, si par exemple on a le signal temporel suivant :

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

Si on lui applique une fenêtre du type $w(t) = \Pi_{\tau/2}(t)$ alors,

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) w(t) \\ Y(f) &= X(f) * W(f) \end{aligned}$$

Le fenêtrage en temps correspond à une convolution des spectres en fréquence,

$$Y(f) = \frac{\tau}{2} \text{sinc}[(f - f_0)\tau] + \tau \text{sinc}[(f + f_0)\tau]$$

4.1.5 Analyse blocs–diagrammes

Très souvent un système général est décomposé en sous systèmes, séries, parallèles ou bouclés. Si chaque sous système est équivalent à un filtre, alors il a une fonction de transfert fréquentielle. Chaque fonction de transfert individuelle doit tenir compte des autres sous systèmes, ou bien être isolée des blocs suivants.

Fonctions élémentaires que l'on peut trouver :

- Multiplication par un scalaire (fonction gain)

$$y(t) = K x(t) \longrightarrow H(f) = K$$

- Dérivation

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow H(f) = j2\pi f$$

- Intégration

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du \longrightarrow H(f) = \frac{1}{j2\pi f}$$

- Retard pur

$$y(t) = x(t - t_0) \longrightarrow H(f) = e^{-j2\pi f t_0}$$

4.1.6 Filtre sans distorsion

On a vu qu'un filtre (système linéaire continu, invariant dans le temps) modifiait l'amplitude et la phase des composantes sinusoidales du signal d'entrée. En filtrage de signal, ceci peut être voulu lorsque par exemple, on cherche à éliminer certaines fréquences.

En transmission de signal au contraire on souhaite transmettre un signal d'un point à un autre, sans distorsion. On suppose que le canal de transmission peut être modélisé idéalement par un système linéaire invariant dans le temps (c'est à dire un filtre). On définit le filtre sans distorsion, comme un filtre qui apporte un gain K et un retard t_0 au signal d'entrée

$x(t)$,

$$\begin{aligned}y(t) &= K x(t - t_0) \\Y(f) &= K e^{-j2\pi f t_0} X(f) \\H(f) &= K e^{-j2\pi f t_0}\end{aligned}$$

Le gain du filtre est K et la phase est $\text{Arg}(H(f)) = -2\pi f t_0$.

Pour réaliser un filtre sans distorsion il faut un gain constant $\forall f$ et une phase égale à une fonction négative de la fréquence. Ceci est irréalisable physiquement car $h(t)$ est un dirac. En fait dans la pratique on souhaite ces deux conditions seulement pour les fréquences où le signal d'entrée a un contenu spectral. On dit que la bande passante du filtre doit contenir les supports fréquentiels des signaux à l'entrée du filtre.

Remarque : l'oreille humaine est sensible à la distorsion de phase.

4.1.7 Exercices

- Soit le signal périodique $s(t)$ défini par $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$

1. Donner la fonction d'autocorrélation $C_{ss}(\tau)$ et la densité spectrale de puissance de $s(t)$.
2. Soit la sortie du filtre $h(t)$ définie par $y(t) = h(t) * x(t) = x(t) - x(t - T)$
 - (a) Quel est le signal de sortie si le signal d'entrée $x(t)$ est un dirac $\delta(t)$.
 - (b) Calculer la réponse en fréquence du filtre $H(f)$.
 - (c) Calculer $|H(f)|^2$ et en déduire $C_{hh}(\tau)$.
3. On considère maintenant que l'entrée $x(t) = s(t)$.
 - (a) Calculer la fonction d'autocorrélation $C_{yy}(\tau)$ de $y(t)$.
 - (b) En déduire la puissance moyenne du signal de sortie.
 - (c) Calculer la densité spectrale du signal de sortie $y(t)$.
 - (d) En déduire la puissance moyenne du signal de sortie, par $P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{yy}(f) df$

- Soit le signal $x_0(t)$ défini par

$$x_0(t) = \begin{cases} A & \text{pour } 0 \leq t \leq \theta \\ -A & \text{pour } \theta \leq t \leq 2\theta \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

avec $\theta = 2 \text{ s}$ et $A = 1 \text{ V}$.

1. Dessiner ce signal.
2. Donner l'énergie de ce signal.
3. Calculer et tracer la fonction d'autocorrélation de $x_0(t)$, $C_{x_0x_0}(\tau)$.

- Soit un signal $x(t)$ réel non nul pour $0 < t < t_1$ et de fonction d'autocorrélation $C_{xx}(\tau)$. Soit $y(t)$ la sortie d'un filtre linéaire de réponse impulsionnelle $h(t)$. On dit qu'un filtre est adapté au signal $x(t)$ si $h(t) = x(t_1 - t)$.

1. Calculer dans ce cas $y(t)$ et l'exprimer en fonction de $C_{xx}(\tau)$.
2. Pour quelle valeur de t , la sortie $y(t)$ est-il maximal? On utilisera une propriété des fonctions d'autocorrélation.

- Soit le signal $v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi_{\theta/2}(t - nT)$

1. Tracer ce signal.
2. Calculer la transformée de Fourier $V(f)$ de ce signal

-Soit le signal $y(t) = Av(t)x(t)$ avec $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

1. Tracer ce signal.

2. Calculer la transformée de Fourier de ce signal en utilisant la convolution de $V(f)$ et $X(f)$.

4.2 Transmission de signaux

4.2.1 Signaux à bande limitée

On a jusqu'à présent considérée des signaux d'étendue spectrale infinie et utilisé des modèles mathématiques, mais ces signaux ne sont pas physiques.

Considérons un signal $s(t)$ à transmettre dont le spectre, calculé par la TF est $S(f)$. Pour un signal physique réel on définit une fréquence min f_m et une fréquence max f_M telles qu'on considère que le spectre $S(f)$ est négligeable ou nul au delà : ceci forme le support spectral. Par exemple en téléphonie on considère que $f_m = 300$ Hz et $f_M = 3400$ Hz, alors qu'en haute fidélité $f_m = 20$ Hz et $f_M = 20000$ Hz.

La transmission de ce signal s'effectue sur un canal de transmission nécessairement imparfait et qui laisse passer certaines fréquences et pas d'autres. On parle de bande passante du canal de transmission. Le canal de transmission peut être un câble métallique, une fibre optique ou encore le milieu aérien (ondes hertziennes).

signal passe-bas

Le signal a pour support $[-B, B]$ avec $f_m = 0$ et $f_M = B$. Ce signal est aussi appelé signal en bande de base ou signal basse fréquence.

signal passe bande

Un signal réel est passe bande si le support de sa TF est borné et ne contient pas la fréquence 0. On peut trouver une fréquence f_p appelée fréquence porteuse et une fréquence B appelée demi largeur de bande qui contiennent $f_m = f_0 - B$ et $f_M = f_0 + B$. Si $f_0 \gg B$ on parle de signaux bande étroite.

Le support spectral du signal $s(t)$ doit être compris dans la bande passante du canal de transmission. Il y a deux types de transmission :

1. la transmission en bande de base,
2. la transmission par modulation.

4.2.2 Transmission en bande de base

On ne fait rien, les signaux sont transmis dans leur support spectral original qui est adapté à la bande passante du canal.

4.2.3 Transmission par modulation

On transpose la support spectral des signaux dans la bande passante du canal de transmission. Ceci se fait par modulation. Si on appelle $y_p(t) = A \cos(2\pi f_p t + \phi_p)$ l'onde porteuse, il existe trois types de modulation

si A varie en fonction de $x(t)$	→	Modulation d'amplitude
si f_p varie en fonction de $x(t)$	→	Modulation de fréquence
si ϕ varie en fonction de $x(t)$	→	Modulation de phase

La transmission par modulation permet d'augmenter les distances de propagation.

4.2.4 Définition d'un filtre de Hilbert

On appelle filtre de Hilbert, le filtre de fonction de transfert

$$Q(f) = -j \operatorname{sign}(f)$$

Le gain en fréquence est égal à 1. Les fréquences positives sont déphasées de -90° , alors que les fréquences négatives sont déphasées de $+90^\circ$. Le filtre de Hilbert est un déphaseur pur de $-\frac{\pi}{2}$ appelé aussi filtre en quadrature.

Calcul de la réponse impulsionnelle

La TF de $s(t) = \text{sign}(t)$ est égale à $S(f) = \frac{1}{j\pi f}$. A partir du théorème de dualité :

$$\begin{array}{ccc} s(t) & \xrightarrow{\text{TF}} & S(f) \\ S(t) & \xrightarrow{\text{TF}} & s(-f) \end{array}$$

on peut écrire,

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}$$

comme $h(t)$ n'est pas causal, $Q(f)$ n'est pas réalisable physiquement.

Transformée de Hilbert

On définit la transformée de Hilbert $\hat{x}(t)$ comme la sortie d'un filtre quadratique,

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t')}{t-t'} dt' \\ \hat{X}(f) &= -j \text{sign}(f) X(f) \end{aligned}$$

Cette intégrale pose des problèmes pour $t = t'$, aussi on prend la valeur principale au sens de Cauchy,

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \int_{-\infty}^{t+\varepsilon} \frac{x(t')}{t-t'} dt' + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{t+\varepsilon}^{+\infty} \frac{x(t')}{t-t'} dt' \right]$$

4.2.5 Signal analytique associé à un signal réel

L'idée est de dire que comme un signal $x(t)$ réel possède un spectre $X(f)$ à symétrie hermitienne $X(-f) = X^*(f)$ la connaissance de $X(f)$ pour $f > 0$ est suffisante pour caractériser ce signal réel $x(t)$.

On définit le signal analytique $z_x(t)$ associé au signal réel $x(t)$ comme étant le signal complexe

$z_x(t)$ tel que son spectre $Z_x(f)$ soit défini comme suit,

$$\begin{aligned} Z_x(f) &= 2X(f) \quad \text{si } f > 0 \\ &= 0 \quad \text{si } f < 0 \end{aligned}$$

Remarques

- $z_x(t)$ est forcément complexe car son spectre n'est pas à symétrie hermitienne.
-

$$\begin{aligned} Z_x(f) &= 2u(f)X(f) \quad u: \text{ fonction Heaviside} \\ Z_x(f) &= [1 + j(-j \operatorname{sign}(f))]X(f) \\ Z_x(f) &= X(f) + jQ(f)X(f) \end{aligned}$$

- par Fourier inverse,

$$z_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

- puisque le spectre de $z_x(t)$ est nul pour $f < 0$

$$z_x(t) = 2 \int_0^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} dt$$

- passage de $z_x(t)$ à $x(t)$: $x(t) = \Re[z_x(t)]$
- filtrage de signaux analytiques, $y(t) = h(t) * x(t)$ donne $z_y(t) = h(t) * z_x(t)$.

4.2.6 Enveloppe complexe des signaux bande étroite

On rappelle qu'un signal bande étroite est un signal passe bande réel tel que $f_0 \gg B$. Pour ces signaux on définit l'enveloppe complexe $\alpha_x(t)$ d'un signal bande étroite $x(t)$ associée à la fréquence f_0 , le signal complexe en bande de base tel que,

$$\alpha_x(f) = Z_x(f + f_0)$$

(On ramène le signal passe bande en bande de base).

4.2.7 Amplitude et phase instantanées d'un signal bande étroite

$\alpha_x(t)$ est un signal complexe,

$$\begin{aligned}\alpha_x(t) &= a_x(t) e^{j\phi_x(t)} \\ x(t) &= a_x(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi_x(t))\end{aligned}$$

avec $a_x(t)$ l'amplitude instantanée du signal passe bande $x(t)$, et ϕ est la phase instantanée.

On interprète un signal bande étroite $x(t)$ autour de la fréquence f_0 comme une sinusoïde de fréquence f_0 dont l'amplitude et la phase instantanée varient lentement par rapport à f_0 .

Deuxième partie

Etude des signaux discrets

CHAPITRE 1 *L'échantillonnage*

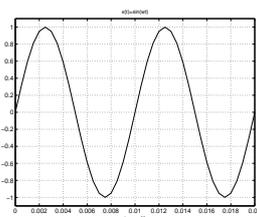
1.1 Notion d'échantillonnage

On appelle échantillonnage d'un signal analogique $x(t)$ le fait de prélever régulièrement (tous les T_e secondes) les valeurs $x(kT_e)$. Le signal $x(kT_e)$ est le signal échantillonné à la période d'échantillonnage T_e . La fréquence $f_e = \frac{1}{T_e}$ est appelée fréquence d'échantillonnage.

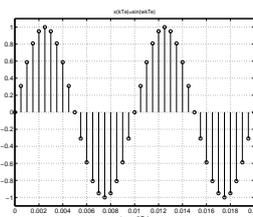
Un signal échantillonné quantifié s'appelle un signal numérique. La quantification permet de passer de valeurs continues en amplitude à des valeurs discrètes. Un convertisseur A/N (Analogique/Numérique) réalise l'échantillonnage et la quantification d'un signal analogique (continue en temps et en amplitude).

On va voir les conditions à respecter pour reconstituer le signal analogique à partir de ses échantillons du signal échantillonné sans perte d'information.

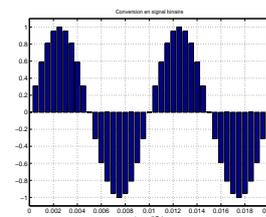
La perte d'information est d'autant plus faible que la quantification est fine. L'erreur de



Signal analogique



Signal échantillonné



Conversion numérique

quantification est modélisé comme un bruit aléatoire,

$$x(kT_e) = s_q(kT_e) + e(kT_e)$$

1.2 Echantillonnage parfait

1.2.1 Définition

L'échantillonnage parfait est réalisé par la multiplication du signal analogique par un peigne de dirac, c'est à dire, une suite de diracs séparés par T_e de poids 1 qui multiplie le signal de spectre $[-B, B]$.

On définit le signal échantillonné $x_e(t)$ par :

$$\begin{aligned} x_e(t) &= x(t) \Upsilon(t) \\ &= x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - kT_e) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) \end{aligned}$$

On rappelle que la fonction Υ correspond au peigne de dirac et que

$$\text{TF}[\Upsilon(t)] = \Upsilon(f) = F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF_e)$$

alors $X_e(f)$ s'écrit

$$\begin{aligned} X_e(f) &= X(f) * F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF_e) \\ X_e(f) &= F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kF_e) \end{aligned}$$

Le spectre du signal échantillonné $X_e(f)$ s'obtient en périodisant avec une période $T_e = \frac{1}{F_e}$ le spectre $X(f)$. Échantillonner dans le temps revient à périodiser dans l'espace des fréquences. Il y a un problème lorsque $F_e < 2B$. En effet, dans ce cas il y a repliement des spectres ou recouvrement ou "aliasing". Ceci implique qu'on ne peut plus reconstruire $X(f)$ à partir de $X_e(f)$ et donc $x(t)$ à partir de $x(kT_e)$. Dans le cas où $F_e \geq 2B$, pour obtenir $X(f)$ à partir de $X_e(f)$, il suffit de filtrer $x_e(t)$ par un filtre passe bas idéal de réponse en fréquences $H(f) = T_e \Pi_{F_e}(f)$ ($h(t) = \text{sinc}(F_e t)$).

1.2.2 Théorème d'échantillonnage en bande de base

Un signal $x(t)$ d'énergie finie dont le spectre est à support sur $[-B, B]$ (signal en bande de base) peut être échantillonné tous les T_e sans perte d'information à condition que la fréquence d'échantillonnage

$$F_e > \frac{1}{T_e} \geq 2B$$

Sans perte d'information signifie qu'on peut reconstruire $x(t) \forall$ instant t , à partir de la suite infinie des échantillons $x(kT_e)$. La fréquence minimale d'échantillonnage $F_e = 2B$ s'appelle la fréquence de Nyquist.

$H(f)$ correspond à la réponse en fréquence du filtre passe bas idéal,

$$\begin{aligned} y(t) &= x_e(t) * h(t) \\ y(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) * \text{sinc}(F_e t) \\ y(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \text{sinc}(F_e(t - kT_e)) \end{aligned}$$

Cette dernière équation correspond à la formule d'interpolation de Shannon.

1.3 Échantillonnage régulier

L'échantillonnage idéal n'est pas réalisable mais l'échantillonnage régulier (ou par bloqueur de durée τ) correspond au cas pratique.

$$\begin{aligned}
x_e(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \Pi_\tau(t - kT_e) \\
x_e(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) * \Pi_\tau(t) \\
x_e(t) &= x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) * \Pi_\tau(t) \\
X_e(f) &= X(f) * \left[F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF_e) \right] (\tau \operatorname{sinc}(\tau f)) \\
X_e(f) &= \tau F_e \operatorname{sinc}(f\tau) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kF_e)
\end{aligned}$$

Pour retrouver le spectre $X(f)$ on multiplie par un filtre passe bas idéal de largeur F_e et il faut multiplier par l'inverse d'un sinc si on veut compenser et retrouver $X(f)$.

1.4 Filtre anti-repliement

Pour de nombreux signaux physiques, $X(f)$ n'est pas connu parfaitement. De plus, il existe toujours un bruit de fond additionnel dû au milieu de mesure (capteur, circuit d'amplification). Donc, on effectue un filtrage passe bas appelé préfiltrage du signal avant son échantillonnage pour supprimer tout repliement spectral.

Si l'on désire observer le spectre d'un signal jusqu'à la fréquence F_{max} , il est souhaitable de prendre une fréquence d'échantillonnage $F_e = n F_{max}$ avec $n \geq 2$.

Un signal de TF à support borné a un support temporel infini donc on a besoin de tous les échantillons de kT_e de $-\infty$ à $+\infty$ afin de reconstruire le signal $x(t)$. On ne peut pas reconstruire en temps réel, il faudra le faire de façon approchée. En pratique pour transmettre la parole par téléphone on filtre entre $[300 \text{ Hz}, 3400 \text{ Hz}]$, on échantillonne à 8000 Hz et on quantifie sur 8 bits/échantillons ce qui correspond à 64000 b/s . Pour un compact disc avec du son stéréo on filtre entre $[0 \text{ et } 20\,000 \text{ Hz}]$, on échantillonne à $44,1 \text{ kHz}$.

1.5 Interpolation par le bloqueur d'ordre 0

Le problème est de reconstituer $x(t)$ à partir de ses échantillons $x(kt_e)$. Une réalisation possible est le bloqueur d'ordre 0. La reconstitution à l'aide d'un bloqueur d'ordre 0 est la plus employée car elle est réalisée par les convertisseurs N/A à l'entrée desquels les valeurs numériques sont maintenues pendant la période d'échantillonnage.

CHAPITRE 2 *Signaux déterministes à temps discret*

On considère les signaux à temps discret comme des suites de nombres $x(k) \in \mathbb{C}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ces signaux sont issus généralement de l'échantillonnage à la fréquence $f_e = \frac{1}{T_e}$ de signaux temporels $x(t)$ analogiques et les nombres $x(k)$ représentent les échantillons $x(kT_e)$.

2.1 Signaux à temps discret élémentaires

Impulsion unité

$$\begin{cases} \delta(k) = 1 & \text{si } k = 0 \\ \delta(k) = 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

Attention $\delta(k)$ ne doit pas être confondu avec la distribution de Dirac $\delta(t)$.

L'échelon unité

$$\begin{cases} u(k) = 1 & \text{si } k \geq 0 \\ u(k) = 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

La porte de longueur N

$$\begin{cases} \Pi_N(k) = 1 & \text{si } 0 \leq k \leq N/2 - 1 \\ \Pi_N(k) = 0 & \text{si } k \geq N/2 \end{cases}$$

2.2 Propriétés des signaux à temps discret

Périodicité

Un signal $x(k)$ est périodique de période $N \in \mathbb{N}^*$ si N est le plus petit entier tel que

$$x(k) = x(k + N) \quad \forall k$$

Energie

On définit l'énergie par

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2$$

Puissance moyenne

On définit la puissance moyenne par

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{+N} |x(k)|^2$$

Signaux à énergie finie, à puissance moyenne finie

Si on a $0 < E_x < \infty$ alors $P_x = 0$
Si on a $0 < P_x < \infty$ alors $E_x = \infty$

Fonction d'autocorrélation d'un signal

– à énergie finie

$$C_{xx}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)x^*(k - \tau)$$

– à puissance moyenne finie

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{+N} x(k)x^*(k - \tau)$$

– périodique

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-T_0/2}^{+T_0/2} x(k)x^*(k-\tau)$$

Fonction d'intercorrélation

– à énergie finie

$$C_{xy}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y^*(k-\tau)$$

– à puissance moyenne finie

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N/2}^{+N/2} x(k)y^*(k-\tau)$$

Produit de convolution

$$y(k) = x(k) * h(k) = h(k) * x(k) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} h(u)x(k-u) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} x(u)h(k-u)$$

2.3 Transformée de Fourier des signaux à temps discret

2.3.1 Définition

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi kf}$$

$$X(f+1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi k(f+1)}$$

$$X(f+1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi kf} = X(f)$$

Donc $X(f)$ est périodique de période 1. Les $x(k)$ sont les coefficients de la série de Fourier de $X(f)$ de période 1,

$$x(k) = \frac{1}{1} \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi kf} df$$

L'intervalle $[-1/2, 1/2]$ est appelé intervalle principal.

Attention le spectre $X(f)$ du signal à temps discret $x(k)$ est à la fréquence continue et de période $F_0 = 1$.

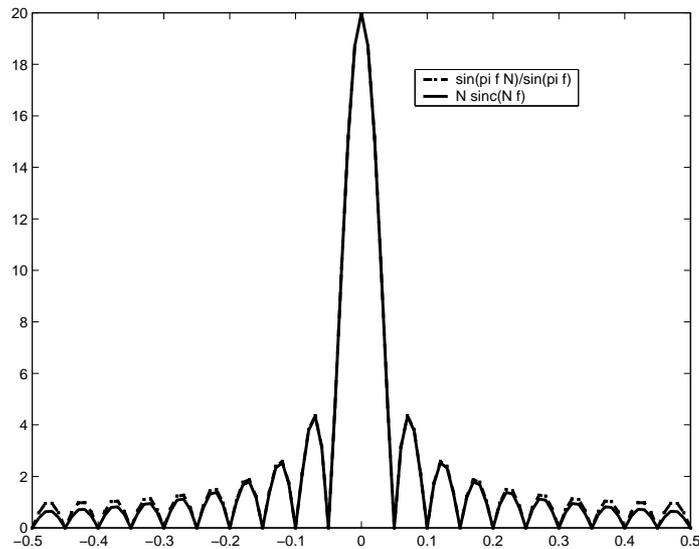
2.3.2 Exemple

Calcul de la TF de $x(k) = \Pi_N(k)$,

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi kf} \\ X(f) &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi kf} \\ X(f) &= \frac{1 - e^{-j2\pi f N}}{1 - e^{-j2\pi f}} \\ X(f) &= e^{-j\pi f(N-1)} \frac{\sin(\pi f N)}{\sin(\pi f)} \end{aligned}$$

2.4 Propriétés de la transformée de Fourier

Linéarité	$Z[ax(k) + by(k)]$	$= aX(z) + bY(z)$
Théorème de la modulation	$\text{TF}[x(k) e^{j2\pi f_0 k}]$	$= X(f - f_0)$
Relation de Parseval	$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) ^2$	$= \int_{-1/2}^{1/2} X(f) ^2 df$
TF d'un produit	$\text{TF}[x(k)y(k)]$	$= \int_{-1/2}^{1/2} X(f')Y(f - f')df'$ $= X(f) * Y(f)$



2.5 Transformée de Fourier discrète d'un signal discret

La TF d'un signal discret est

$$X(f) = X(e^{j2\pi f}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi k f}$$

$X(f)$ est périodique de période 1. De plus, la TF inverse donne

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi f k} df$$

Inconvénients : f varie de façon continue, on ne peut donc pas l'implanter sur un calculateur numérique. Il faut une infinie de $x(k)$. En pratique on peut :

1. prendre un nombre fini N d'échantillons $x(k)$ choisis de façon à conserver les valeurs importantes du signal $k = 0, \dots, N - 1$,

$$\tilde{X}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi k f}$$

2. et discrétiser la fréquence f sur $[0,1[$. On choisit $\Delta = 1/N$, c'est à dire $f_n = n/N$ pour $n = 0, \dots, N - 1$.

$$\hat{X}\left(\frac{n}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} \text{ avec } n = 0, \dots, N-1$$

On obtient ainsi N valeurs $\hat{X}(0), \hat{X}(1/N), \dots, \hat{X}(N-1/N)$ correspondant à la transformée de Fourier discrète (TFD).

Par définition la TFD est une application linéaire qui à N valeurs complexes $(x(0), \dots, x(N-1))$ associe N valeurs complexes (X_0, \dots, X_{N-1}) et on note

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} \text{ avec } n = 0, \dots, N-1$$

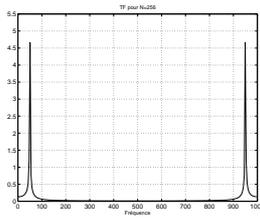
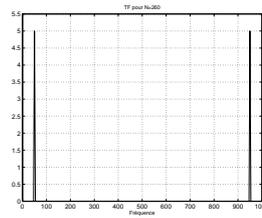
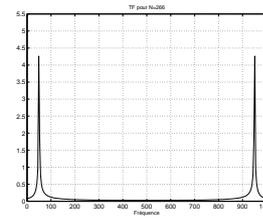
La suite X_n est une suite périodique de période N .

La TFD inverse donne

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{j2\pi k \frac{n}{N}} \text{ avec } k = 0, \dots, N-1$$

2.5.1 Remarques

- La TFD représente les valeurs échantillonnées de la TF d'un signal discret de durée finie, $x_0, \dots, x(N-1)$.
- Si $x(k)$ n'est pas de durée finie, on a les valeurs échantillonnées de la TF du signal discret $x(k) \Pi_N(k)$, $\Pi_N(k)$ étant le fenêtrage rectangulaire de longueur N . Ceci entraîne des oscillations dans la TF et l'utilisation de fenêtrages de pondération $g(k)$ pour les faire disparaître (Hamming, Hanning).
- La TFD ne représente les valeurs échantillonnées de la TF d'un signal à temps continu $x(t)$ que si $x(t)$ est à durée limitée $[0, NT_e]$ et si sa TF $X(f)$ à un spectre à bande limitée $[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}]$. Comme il n'existe pas de signaux à durée et à bande limitée, on commet une erreur systématique en considérant les X_n comme des échantillons de la TF $X(f)$.

 $N = 256$  $N = 260$  $N = 266$

2.5.2 Exemple

On cherche à déterminer la TFD X_n du signal

$$x(k) = A \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_e} k\right)$$

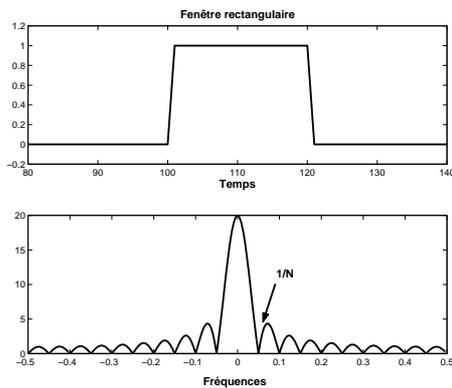
$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} \text{ avec } n = 0, \dots, N-1$$

- Signal réel \longrightarrow le module du spectre est une fonction paire
- Signal échantillonné \longrightarrow le module du spectre est une fonction périodique (f_e)
- TFD \longrightarrow fréquences discrètes
- \longrightarrow Signal à support borné
- \longrightarrow multiplication en temps=convolution en fréquence

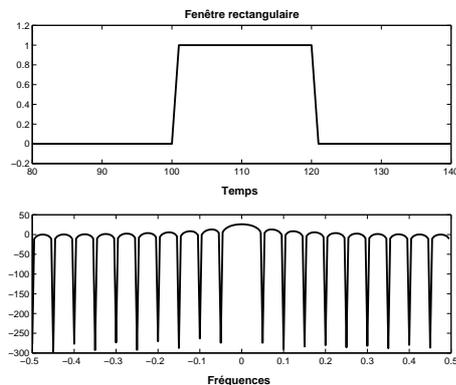
2.6 Fenêtres de pondération

Nous allons dans ce paragraphe, décrire plusieurs fenêtres de pondération, en montrer les avantages et leur limites.

Bien que ce ne soit pas une règle générale, dans ce paragraphe, les fenêtres étudiées seront placées symétriquement autour de l'origine pour simplifier les calculs. Les résultats établis dans ce cas pourront être modifiés aisément pour d'autres positions à l'aide du théorème du retard.



Module de la transformée de Fourier



Module de la transformée de Fourier en dB

2.6.1 Fenêtre rectangulaire

La manière brutale de limiter la durée d'un signal est de le multiplier par un signal rectangulaire (fonction Porte), possédant N échantillons unités. Au niveau spectral cette multiplication revient à convoluer la TF de $x(t)$ par la TF de la fonction porte. Cette opération de convolution a pour effet d'introduire des ondulations dans le spectre.

En règle générale la résolution en fréquence sera d'autant meilleure que :

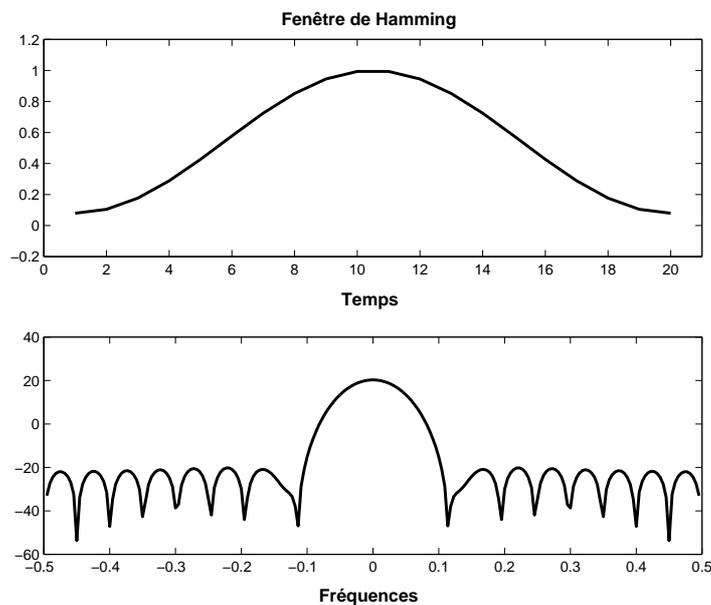
- le lobe principale (central) est étroit,
- les lobes secondaires (latéraux) sont bas.

Malheureusement la réduction en hauteur des lobes secondaires s'accompagne toujours de l'élargissement du lobe principal. Il faut donc accepter un compromis entre ces deux effets.

2.6.2 Fenêtre de Hamming

L'équation de la fenêtre de Hamming est donné par la relation suivante pour $\alpha = 0.54$:

$$\begin{cases} w(k) = \alpha + (1 - \alpha) \cos(2\pi k/N) & \text{pour } |k| \leq N/2 \\ = 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.1)$$



Remarque

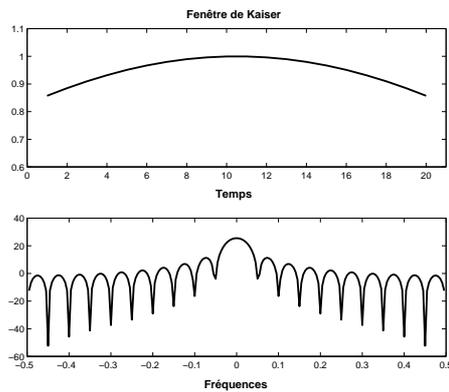
La fenêtre de Hanning est obtenue pour $\alpha = 1/2$ dans l'équation 2.1.

2.6.3 Fenêtre de Kaiser

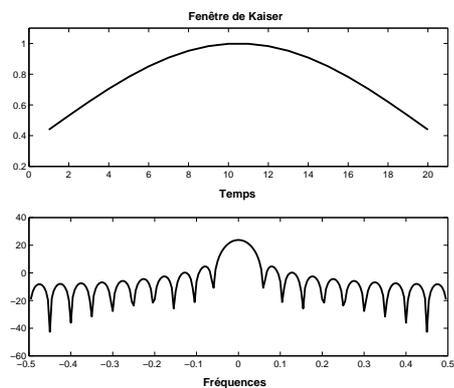
Une autre famille de fonctions fenêtre a été proposée par Kaiser. Elle permet selon la valeur d'un paramètre β , de spécifier dans le domaine des fréquences le compromis entre la largeur de lobe principal et l'amplitude des lobes secondaires. Une caractéristique importante de cette famille de raffinées de fenêtres est qu'il est possible d'obtenir de fortes atténuations des lobes secondaires tout en conservant une largeur minimale pour le pic central. La forme générale de cette fonction est la suivante :

$$\begin{cases} w(k) = \frac{I_0[\beta\sqrt{N^2-4k^2}]}{I_0(\beta N)} & \text{pour } |k| \leq N/2 \\ = 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.2)$$

où I_0 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro et où β caractérise l'échange d'énergie entre le pic central et les lobes secondaires. La largeur du pic central augmente avec β .



$$\beta = 0.8$$



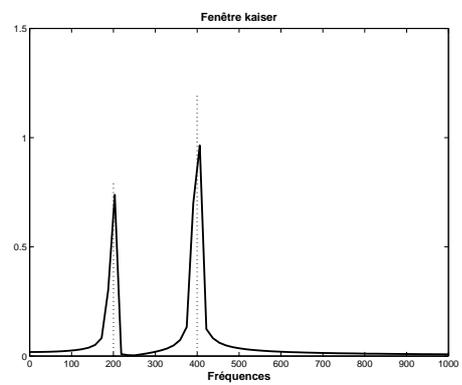
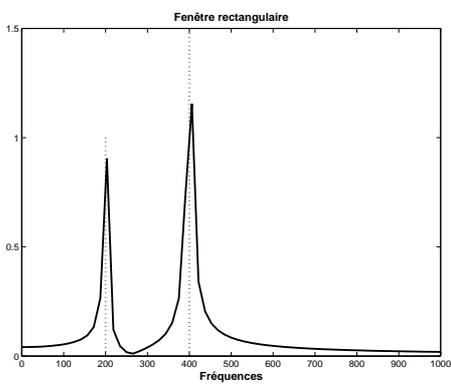
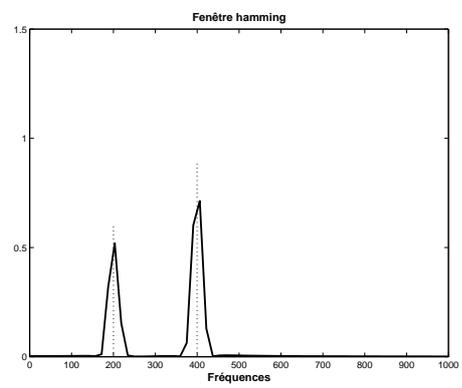
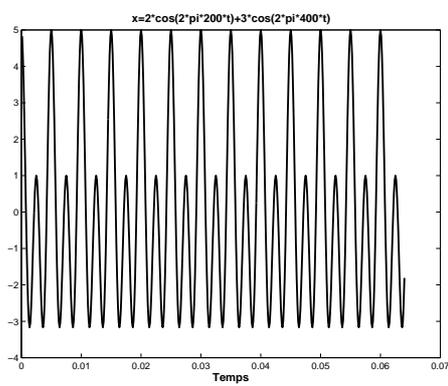
$$\beta = 2$$

2.6.4 Exemple

On génère un signal composé de deux sinusoïdes de fréquence 200 et 400 Hz, échantillonné à 8000 Hz et ayant 512 points. On calcule la TF de ce signal après multiplication par une fenêtre rectangulaire, de Hamming et de Kaiser. la résolution en fréquence est donc $\frac{f_e}{N} = 16Hz$.

2.7 La transformée de Fourier rapide

La transformée de Fourier rapide ou FFT (Fast Fourier Transform) est une technique de calcul rapide de la TFD. L'algorithme de base, utilise un nombre de points $N = 2^p$ et son gain en temps par rapport à un calcul direct est de l'ordre de $N/\log_2(N)$. Pour $N = 1024$, la FFT est donc environ 100 fois plus rapide.



Troisième partie

Etude des signaux aléatoires

CHAPITRE 1 *Rappels sur les probabilités*

1.1 Introduction

Jusqu'à présent, nous avons parlé des signaux déterministes dans l'étude des systèmes linéaires invariant dans le temps, sans mentionner le rôle important que jouent les phénomènes aléatoires en traitement du signal et plus particulièrement en télécommunications.

En effet, le modèle déterministe ne convient plus à expliquer tous les phénomènes qui peuvent se produire dans une chaîne de transmission par exemple.

1.2 Probabilités

1.2.1 Définitions

Une expérience est dite aléatoire si l'on ne peut prévoir son résultat, le lancer de dés, le jeu de pile ou face.

L'ensemble S de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé "univers" à cette expérience. Chaque résultat d'un tirage aléatoire correspond à une épreuve. Un ensemble d'épreuves constitue un "événement". On dit qu'un événement est lié à une expérience si pour tout résultat appartenant à S on sait dire si cet événement a eu lieu ou non. L'association de nombres réels aux événements définis sur S constitue une mesure de probabilité.

1.2.2 Définitions complémentaires

- le complémentaire d'un événement A , noté \bar{A} , est l'événement constitué de l'ensemble des éléments de S qui n'appartient pas à A .
- L'union des événements A et B , noté $A \cup B$ est l'événement constitué de des éléments qui appartiennent à A , à B , ou les deux à la fois.
- L'intersection des événements A et B , notée $A \cap B$, se compose de l'ensemble des événements qui appartiennent simultanément à A et B .
- L'événement qui ne contient aucun élément est dit événement nul, noté \emptyset .
- Deux événements sont disjoints s'ils n'ont aucun point commun, c'est à dire si $A \cap B = \emptyset$.
- Si tout point de A appartient à B , on dit que A est un sous-ensemble de B , et on le note par $A \subset B$.

1.2.3 Algèbre des événements

- $A \cup \bar{A} = S$,
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$,
- $A \cap S = A$,
- $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$,
- $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$,

Les opérations d'union et d'intersection possèdent les propriétés suivantes :

- Commutativité: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.
- Associativité: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- Distributivité: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

1.2.4 Probabilité d'un événement

Définition classique

Une définition classique, postule que la probabilité d'un événement A a pour expression :

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

où N est le nombre de résultats possibles et N_A le nombre de résultats faisant partie de l'événement A . Notons que dans cette définition, tous les résultats sont supposés équiprobables.

Définition axiomatique

La probabilité d'un événement A , notée $P(A)$, est un nombre réel associé à A qui satisfait à l'ensemble des axiomes suivants :

- Axiome 1: $P(A) \geq 0$
- Axiome 2: $P(S) = 1$
- Axiome 3: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$

A partir de ces trois axiomes, on peut établir les propriétés suivantes, toutes très intéressantes :

- $P(A) \leq 1$, il s'en suit que $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,
- $P(\emptyset) = 0$,
- $P(A) \leq P(B)$ si $A \subset B$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Probabilité conditionnelle

La probabilité conditionnelle d'un événement A par rapport à l'événement B , noté $P(A|B)$, a pour définition :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (1.1)$$

où $P(B) \neq 0$ et $P(A \cap B)$ est la probabilité conjointe de A et B . On peut en déduire la loi de Bayes :

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) P(B)}{P(A)} \quad (1.2)$$

où $P(B|A)$ est la probabilité conditionnelle de B par rapport à A .

Événements indépendants

Deux événements A et B sont dits statistiquement indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

alors l'équation 1.1 devient :

$$P(A|B) = P(A)$$

Soit A_1, A_2, \dots, A_n un ensemble d'événements définis sur S . Ces n événements sont dits mutuellement indépendants si et seulement si

$$\begin{aligned} P(A_i \cap A_j) &= P(A_i)P(A_j) \\ P(A_i \cap A_j \cap A_k) &= P(A_i)P(A_j)P(A_k) \\ &\vdots \\ P(A_i \cap A_j \cap \dots \cap A_k) &= P(A_i)P(A_j) \dots P(A_n) \end{aligned}$$

Probabilité totale

Soit N événements A_1, A_2, \dots, A_N mutuellement exclusifs constituant exhaustivement l'ensemble S , c'est à dire vérifiant les conditions suivantes :

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j = 1, 2, \dots, N$$

et

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N = S$$

Soit B un événement quelconque défini sur S . Alors :

$$P(B) = \sum_{k=1}^N P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^N P(B|A_k)P(A_k)$$

que l'on appelle probabilité totale de l'événement B .

1.3 Variables aléatoires réelles

Une variable aléatoire (VA) $X(\lambda)$ (en majuscule) est une fonction qui associe un nombre réel, appelé valeur x (en minuscule) de $X(\lambda)$, à chaque épreuve λ de S en respectant les conditions suivantes :

- L'ensemble $\{\lambda : X(\lambda) \leq x\}$ est un événement pour tout nombre réel x .
- $P\{\lambda : X(\lambda) = -\infty\} = 0$ et $P\{\lambda : X(\lambda) \leq \infty\} = 1$

Si X ne peut prendre qu'un ensemble dénombrable de valeurs distinctes, on dit que X est une variable aléatoire discrète. Si X peut prendre une valeur quelconque sur un ou plusieurs intervalles de la droite réelle, alors X est une variable aléatoire continue.

Le nombre d'appels téléphoniques arrivant à un bureau est une variable aléatoire discrète, alors que la date exacte de l'arrivée d'un de ces appels est une variable aléatoire continue.

1.3.1 Histogramme

Dans la majorité des cas, on peut associer à un événement une mesure qui est un nombre réel, par exemple une mesure de longueur ou de température. Pour caractériser la variable, on commence par découper l'intervalle des réels en segments $[x_k, x_{k+1}]$. Puis, on effectue N mesures et on construit un histogramme. Pour cela on compte le nombre de fois n_k où le résultat de la mesure x appartient à chacun de ces segments. On tient compte du fait que les segments couvrent l'axe des réels et sont disjoints et on définit la probabilité

$$\text{proba}(x \in [x_k, x_{k+1}[) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_k}{N} \quad (1.3)$$

On réduit la taille des intervalles en faisant tendre leur nombre vers l'infini.

1.3.2 Fonction de répartition

On définit la fonction de répartition de la variable aléatoire X comme étant la probabilité que X soit strictement inférieure à x :

$$F_X(x) = P(X < x) \quad \text{pour tout } x \text{ variant de } -\infty \text{ à } +\infty \quad (1.4)$$

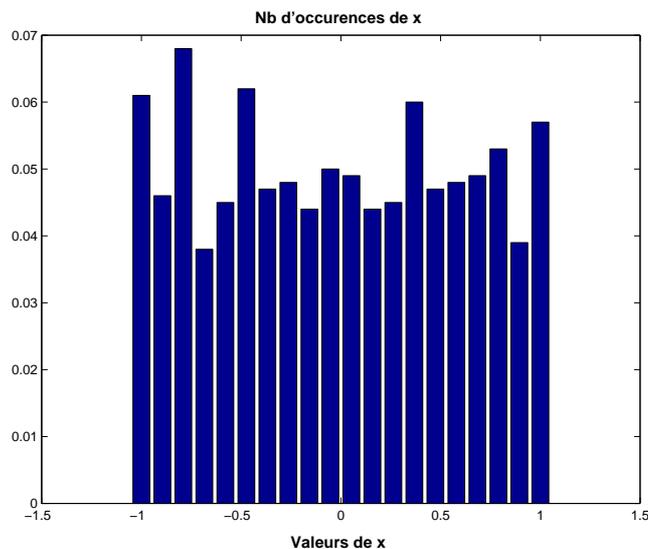


FIG. 1.1 – Exemple d'histogramme

C'est une fonction non décroissante qui peut présenter des paliers et des discontinuités. Elle tend vers 0 lorsque $x \rightarrow -\infty$ et 1 lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Les propriétés de $F_X(x)$ sont les suivantes :

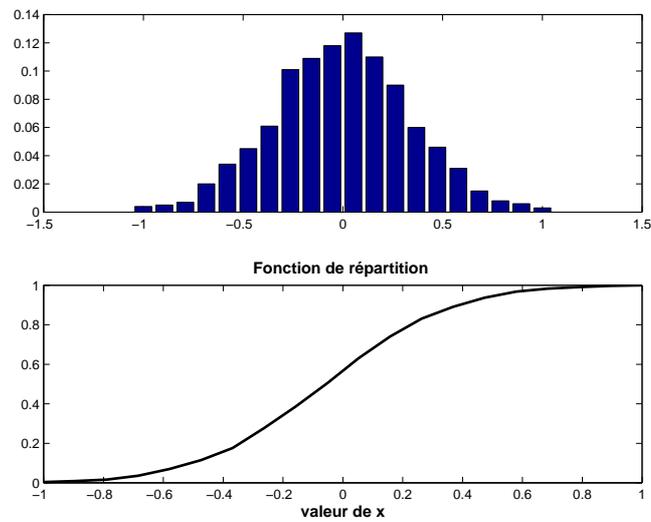
- $F_X(-\infty) = 0$,
- $F_X(\infty) = 1$,
- $0 \leq F_X(x) \leq 1$,
- $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ si $x_1 \leq x_2$,
- $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$.

Exemples

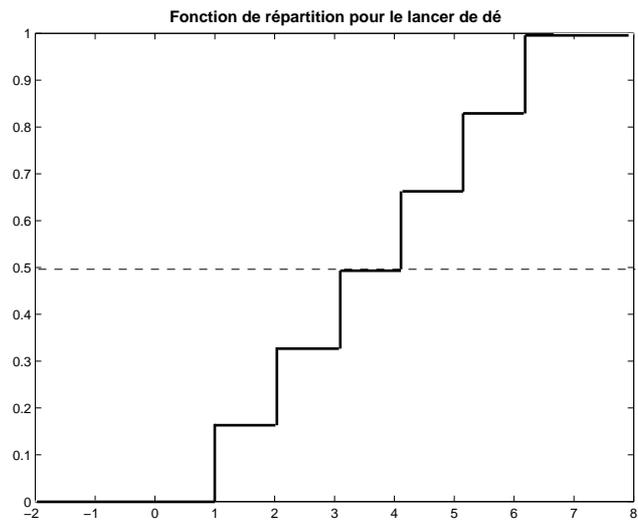
Le premier exemple correspond à la fonction de répartition d'un signal de type gaussien.

Le second exemple consiste à étudier le lancer de dé (6 faces). La variable aléatoire est une variable aléatoire discrète et si le dé n'est pas truqué on a

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^6 P(x_i)u(x - x_i)$$



soit



1.3.3 Densité de probabilité

La probabilité que x appartienne à l'intervalle $[x_k, x_k + dx[$ est

$$\begin{aligned}\text{proba}(x \in [x_k, x_k + dx]) &= dF_X(x) \\ \text{proba}(x \in [x_k, x_k + dx]) &= p_X(x)dx\end{aligned}$$

avec $F_X(x)$ différentiable et $p_X(x)$ correspond à la densité de probabilité (ddp) de la variable aléatoire X et a donc pour définition :

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (1.5)$$

C'est une fonction non négative, mais ce n'est pas une probabilité, elle n'est pas nécessairement inférieure à un.

les propriétés de $p_X(x)$ sont les suivantes :

- $p_X(x) \geq 0$,
- $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)dx = 1$,
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(\epsilon)d\epsilon$,
- $P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p_X(x)dx$

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, on a :

$$p_X(x) = \sum_i P(x_i)\delta(x - x_i) \quad (1.6)$$

On peut estimer la densité de probabilité en construisant un histogramme pour lequel le pas d'échantillonnage de l'axe des réels est infiniment grand. Dans l'exemple de la figure suivante, le nombre d'échantillons est de 1000, 10000 et enfin 100000.

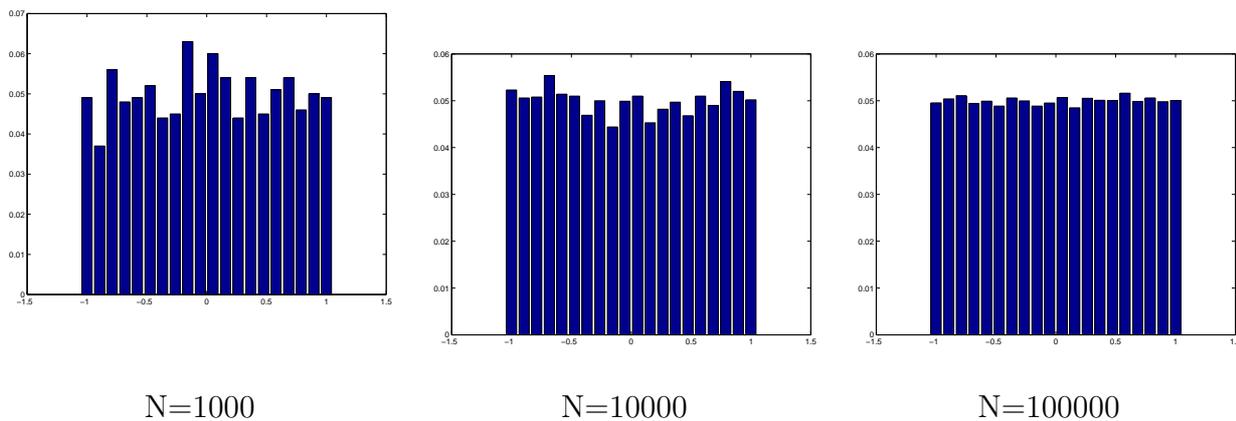


FIG. 1.2 – Convergence de l’histogramme vers la densité de probabilité

1.4 Lois de répartition particulières

1.4.1 Loi de Bernoulli x

La loi de Bernoulli x prend la valeur 0 avec la probabilité r et la valeur 1 avec la probabilité $(1-r)$. Sa densité de probabilité s’écrit :

$$p_X(x) = \sum_i P(x_i)\delta(x - x_i) = r\delta(x) + (1 - r)\delta(x - 1)$$

1.4.2 Loi de poisson

Cette loi correspond à la loi que l’on obtient en comptant des événements aléatoires indépendants : arrivée d’une particule sur un capteur, décompte des appels sur un central téléphonique, comptage de voitures sur une route, etc. C’est la loi centrale des études sur les files d’attente dans les réseaux de communication. Elle dépend d’un paramètre λ qui caractérise le débit moyen du flux. La probabilité d’observer k événements pendant une durée t est donné par

$$p_X(x,t) = \frac{(\lambda t^k)}{k!} e^{-\lambda t} \quad (1.7)$$

pour $k \geq 0$ et $t \geq 0$ et où $0! = 1$.

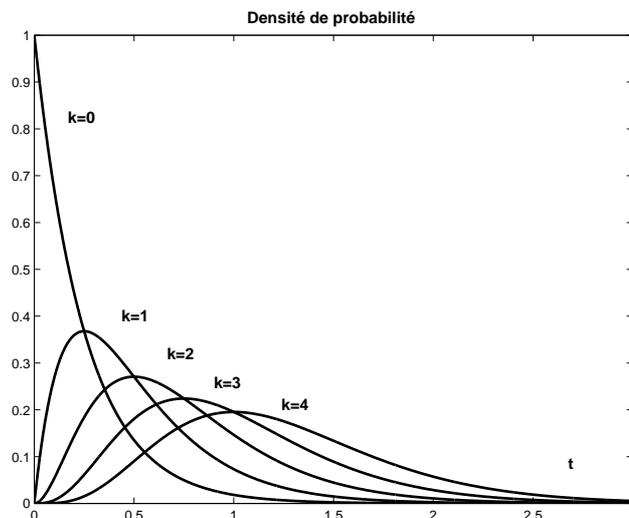


FIG. 1.3 – Densité de probabilité $p(k,t)$ de la loi de poisson

1.4.3 Loi uniforme

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme si elle prend ses valeurs uniquement dans l'intervalle $[a,b[$ et que sa densité de probabilité vaut

$$p_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad (1.8)$$

En effet, la densité de probabilité correspond est une constante dans l'intervalle $[a,b[$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = 1$$

$$\int_a^b p_X dx = 1$$

$$p_X = \frac{1}{b-a}$$

Sa fonction de répartition est composée de 3 segments de droites.

- Pour $x < a$, $p_X(x) = 0$ donc $F_X(x) = 0$,

– pour $[a, b[$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(u) du$$

$$F_X(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} du$$

$$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

– pour $x \geq b$, $F_X(x) = 1$

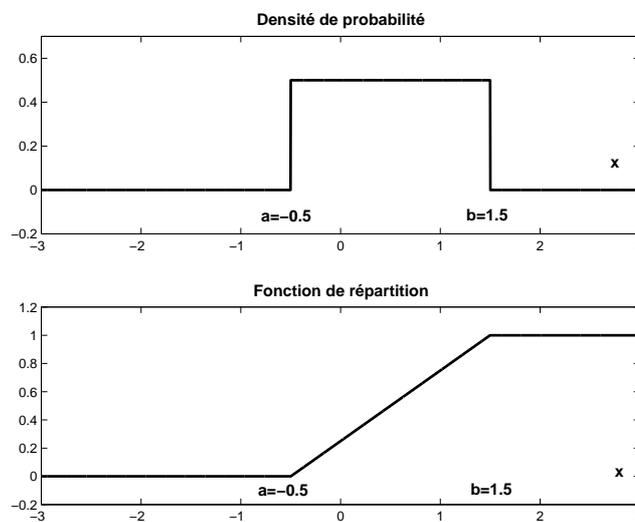


FIG. 1.4 – *Loi uniforme*

1.4.4 Loi normale ou gaussienne

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale si sa densité de probabilité a pour expression :

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \quad (1.9)$$

La densité de probabilité passe par son maximum pour $x = m_x$. Cette loi présente plusieurs caractéristiques importantes :

– Cette loi joue un rôle fondamental dans l'étude des phénomènes aléatoires que l'on

rencontre dans les systèmes physiques. La plupart des processus aléatoires naturels sont pratiquement gaussiens. De plus, d'après le théorème central limite (cf paragraphe 1.8), la somme d'un grand nombre de variables aléatoires, sous certaines conditions suit une loi normale.

- Tout l'information est donnée directement par la moyenne m_x et la variance σ_x de la variable aléatoire X . 95 % des valeurs de x sont contenues dans l'intervalle $[x - 2\sigma, x + 2\sigma]$.
- Elle permet des développements mathématiques efficaces.

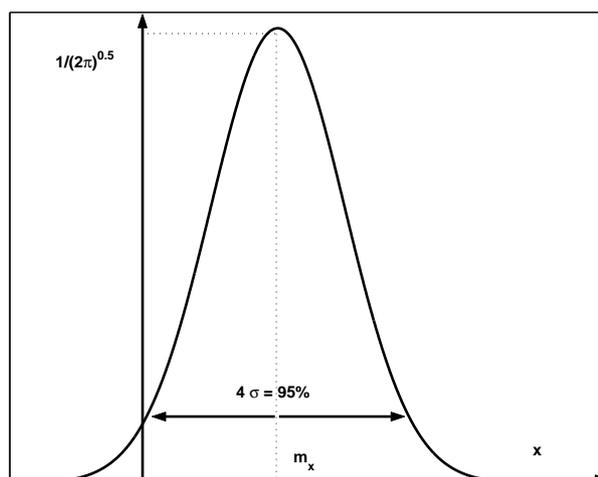


FIG. 1.5 – *Loi normale*

1.5 Moyennes statistiques

Souvent on peut caractériser une variable aléatoire uniquement par des informations partielles comme la valeur moyenne de la variable aléatoire et sa dispersion autour de cette valeur moyenne (variance).

1.5.1 Espérance mathématique

On appelle moyenne statistique (ou moment d'ordre 1), la quantité E est appelée espérance mathématique :

$$E[X] = m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx \quad (1.10)$$

Si X est une variable aléatoire discrète, à partir de la relation 1.6, il vient :

$$E[X] = m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left[\sum_i P(x_i) \delta(x - x_i) \right] dx = \sum_i x_i P(x_i) \quad (1.11)$$

Dans le cas où les probabilités sont uniformément réparties, c'est-à-dire lorsque $P(x_i) = \frac{1}{N}$ pour $i = 1, \dots, N$, la relation 1.11 devient :

$$E[X] = m_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1.12)$$

ce qui donne la moyenne arithmétique des x_i .

1.5.2 Fonction d'une variable aléatoire

L'espérance mathématique de $Y = g(X)$ a pour expression :

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y p(y) dy$$

soit

$$E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) p(x) dx$$

Si X est une variable aléatoire discrète :

$$E[Y] = \sum_i g(x_i) P(x_i)$$

1.5.3 Fonction de deux variables aléatoires

L'espérance mathématique de $Z = g(X, Y)$ a pour expression :

$$E[Z] = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)p(x,y)dx dy$$

Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes alors :

$$E[Z] = E[g(X,Y)] = \sum_i \sum_k g(x_i,y_k)P(x_i,y_k)$$

où $P(x_i,y_k) = P[X = x_i, Y = y_k]$

1.5.4 Remarques

On notera que l'espérance mathématique est un opérateur linéaire :

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y] \quad (1.13)$$

$$E[cX] = c E[X] \quad (1.14)$$

où c est une constante.

1.5.5 Moments et variance

Le moments d'ordre n de la variable aléatoire X a pour expression :

$$M_n = E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x) dx \quad (1.15)$$

Le moment d'ordre centré n de X a pour définition :

$$E[(X - m_x)^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^n p_X(x) dx \quad (1.16)$$

avec $m_x = E[X]$.

Le moment centré d'ordre 2 de X est appelé variance de X , soit :

$$\text{var}[X] = \sigma_x^2 = E[(X - m_x)^2] \quad (1.17)$$

La racine carré de la variance, notée σ_x , est appelée écart type de X . **La variance est une mesure de la dispersion des valeurs de X autour de sa valeur moyenne m_x .**

$$\sigma_x^2 = E[X^2 - 2m_x X + m_x^2] = E[X^2] - 2m_x E[X] + m_x^2 = E[X^2] - m_x^2 \quad (1.18)$$

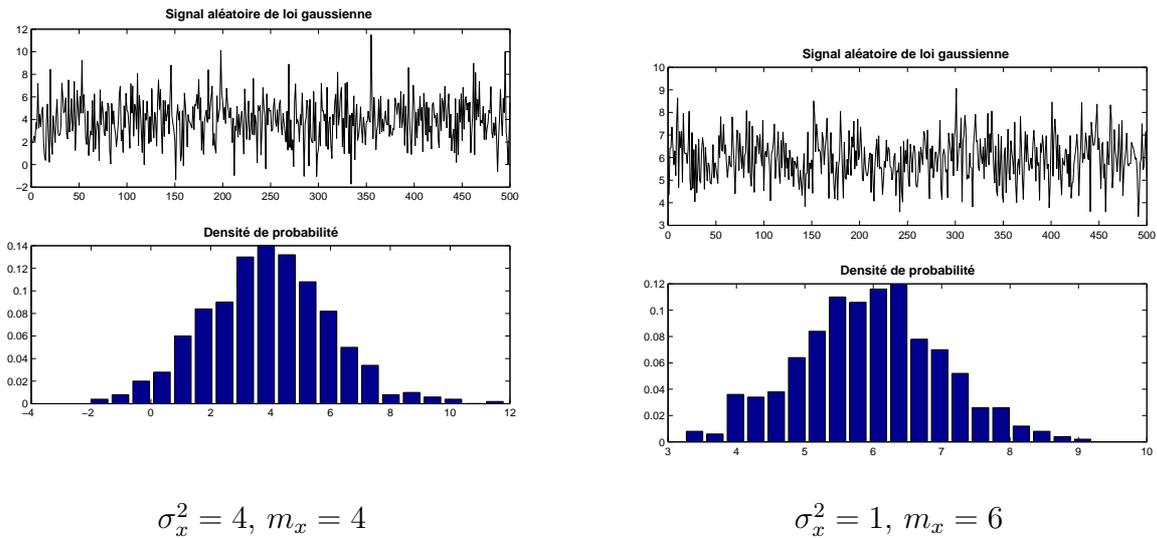


FIG. 1.6 – Illustration de la moyenne et de la variance d'une variable aléatoire gaussienne

1.5.6 Fonction caractéristique

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire X a pour définition :

$$\Phi_X(u) = E[e^{juX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{juX} p_X(x) dx \quad (1.19)$$

où u est une variable réelle. Cette fonction passe par un maximum à l'origine et vérifie la propriété :

$$|\Phi_X(u)| \leq \Phi_X(0) = 1$$

1.6 Moments conjoints et covariance

Un des objectifs fondamentaux du calcul des probabilités est d'établir un lien éventuel entre plusieurs résultats d'expériences. On est ainsi amené à étudier le comportement conjoint de plusieurs variables aléatoires comme le poids et la taille des individus d'un groupe, ou bien l'âge des conjoints d'un couple, etc.

1.6.1 Répartition conjointe

Soit deux variables aléatoires X et Y définies sur S . On définit $F_{XY}(x,y)$, la fonction de répartition conjointe de X et Y , de la façon suivante :

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (1.20)$$

Les événements se composent de toutes les épreuves λ de S pour lesquelles on a simultanément $X(\lambda) \leq x$ et $Y(\lambda) \leq y$.

La densité de probabilité conjointe de X et Y a pour expression :

$$p_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y) \quad (1.21)$$

ce qui implique que $p_{XY}(x,y) \geq 0$

1.6.2 Répartition marginale

Les fonctions $F_X(x)$ et $F_Y(y)$ sont appelées fonction de répartition de probabilité marginales :

$$F_X(x) = F_{XY}(x, \infty) \quad (1.22)$$

$$F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y) \quad (1.23)$$

Les densité de probabilité marginales $p_X(x)$ et $p_Y(y)$ ont pour expression :

$$p_X(x) = F'_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x,y)dy \quad (1.24)$$

$$p_Y(y) = F'_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x,y)dx \quad (1.25)$$

$$(1.26)$$

1.6.3 Répartition conditionnelle

La fonction de répartition conditionnelle de X par rapport à l'événement A a pour définition :

$$F_X(x|A) = P(X \leq x|A) = \frac{P(X \leq x, A)}{P(A)} \text{ avec } P(A) \neq 0 \quad (1.27)$$

où $P(X \leq x, A)$ est la probabilité de l'événement conjoint $X \leq x \cup A$.

La densité de probabilité conditionnelle de X par rapport à A a pour définition :

$$p_X(x|A) = \frac{dF_X(x|A)}{dx} \quad (1.28)$$

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur S . La densité de probabilité conditionnelle de X par rapport à l'événement $Y = y$ a pour valeur :

$$p_{X|Y} = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)} \text{ avec } p_Y(y) \neq 0 \quad (1.29)$$

où $p_Y(y)$ est la densité de probabilité marginale de Y .

1.6.4 Variables aléatoires indépendantes

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si :

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$$

ou encore :

$$p_{XY}(x,y) = p_X(x) p_Y(y)$$

et $p_{X|Y} = p_X(x)$

Soit X et Y deux variables aléatoires de probabilité conjointe $p_{XY}(x,y)$.

1.6.5 Corrélation

La corrélation de X et de Y , que l'on note R_{XY} , et qui a pour expression :

$$R_{XY} = E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x y p_{XY}(x,y) dx dy \quad (1.30)$$

1.6.6 Covariance

La covariance de X et de Y , notée C_{XY} , se définit comme suit :

$$C_{XY} = E[(X - m_x)(Y - m_y)] \quad (1.31)$$

En développant la relation, on obtient :

$$C_{XY} = E[XY] - E[X] E[Y] = R_{XY} - m_x m_y \quad (1.32)$$

1.6.7 Coefficient de corrélation

Le coefficient de corrélation de X et Y a pour définition :

$$\rho = \frac{C_{XY}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (1.33)$$

où σ_x , σ_y sont respectivement les écarts types de X et Y . On peut montrer que $|\rho| \leq 1$, il s'en suit que $|C_{XY}| \leq \sigma_x \sigma_y$.

Si deux variables aléatoires X et Y sont non corrélées si et seulement si $C_{XY} = 0$. Dans ce cas

$$E[XY] = E[X] E[Y] \quad (1.34)$$

1.6.8 Evénements orthogonaux

Deux événements sont dits orthogonaux (au sens de la corrélation) si :

$$R_{XY} = E[XY] = 0 \quad (1.35)$$

1.6.9 Variables conjointement gaussiennes

Les variables X et Y sont dites conjointement normales si leur probabilité conjointe a pour expression :

$$p_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{\left[\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2 \right]} \quad (1.36)$$

Cette formule fait apparaître les variances de chacune des deux variables, leur moyenne, ainsi que leur coefficient de corrélation. Si le coefficient de corrélation est nul ($\rho = 0$), $p_{XY}(x,y)$ s'écrit comme le produit

$$p_{XY}(x,y) = \left(\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \right) \left(\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}} \right) \quad (1.37)$$

Les variables sont donc indépendantes. La figure 1.7 représente $p_{XY}(x,y)$ pour $m_x = 0$, $\sigma_x = 3$, $m_y = -1$ et $\sigma_y = 1$).

1.7 Changement de variables

1.7.1 Fonction de variables aléatoires

Etant donné une variable aléatoire X et une fonction $g(x)$, l'expression

$$Y = g(X)$$

constitue une autre variable aléatoire dont la fonction de répartition est :

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) \quad (1.38)$$

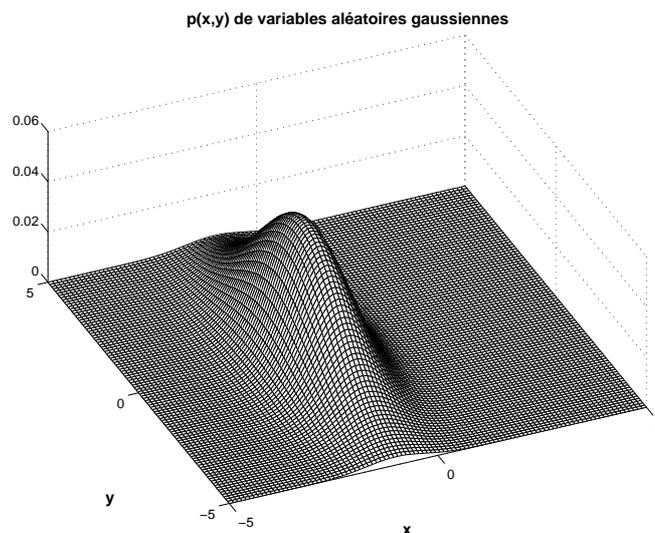


FIG. 1.7 – Densité de probabilité d'un couple de VA gaussiennes

1.7.2 Détermination de la densité de probabilité

Pour trouver la densité de probabilité $p_Y(y)$, on résout l'équation $y = g(x)$. En désignant par x_k les racines réelles de l'équation $y - g(x) = 0$, on a :

$$p_Y(y) = \sum_k \frac{p_X(x_k)}{|g'(x_k)|} \quad (1.39)$$

où $g'(x)$ est la dérivée de $g(x)$.

1.7.3 Formule de changement de variables

Définition

Soit deux variables aléatoires X_1 et X_2 de densité de probabilité conjointe $p_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ et deux fonctions $g_1(x_1, x_2)$ et $g_2(x_1, x_2)$, considérons les deux variables aléatoires suivantes :

$$\begin{cases} Y_1 = g_1(X_1, X_2) \\ Y_2 = g_2(X_1, X_2) \end{cases}$$

et supposons que la transformation soit bijective : à tout couple (y_1, y_2) donné, il existe alors

une solution unique (x_1, x_2) qui s'écrit :

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2) \\ y_2 = g_2(x_1, x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = h_1(y_1, y_2) \\ x_2 = h_2(y_1, y_2) \end{cases}$$

Dans ce cas la densité de probabilité des variables aléatoires (Y_1, Y_2) a pour expression :

$$p_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) = p_{X_1 X_2}(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2)) |J(y_1, y_2)| \quad (1.40)$$

où $J(y_1, y_2)$ représente le Jacobien de la transformation défini par :

$$J(y_1, y_2) = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1(y_1, y_2)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2(y_1, y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2(y_1, y_2)}{\partial y_2} \end{vmatrix} \quad (1.41)$$

Plutôt d'utiliser directement la formule 1.40 pour calculer la densité de probabilité, il est parfois avantageux de revenir à la définition de la fonction de répartition de (Y_1, Y_2) en déterminant dans le plan (x_1, x_2) le domaine qui vérifie $\{g_1(x_1, x_2) \leq y_1\}$ et $\{g_2(x_1, x_2) \leq y_2\}$, puis intégrer sur ce domaine la fonction $p_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$. Pour obtenir la densité de probabilité, il suffit ensuite de dériver successivement par rapport à y_1 et y_2 suivant la formule 1.21.

Exemple

Considérons deux variables aléatoires X et Y de densité de probabilité conjointe $p_{XY}(x, y)$ et soit à calculer la densité de probabilité de la variable aléatoire $Z = X + Y$. Pour cela considérons la transformation $(x, y) \rightarrow (t, z)$ définie par :

$$\begin{cases} t = x \\ z = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = z - t \end{cases}$$

Le Jacobien de la transformation s'écrit :

$$J(t, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

et donc

$$p_Z(t, z) = |J(t, z)| p_{XY}(x, y) = p_{XY}(t, z - t)$$

On en déduit la densité de probabilité de Z en intégrant sur t (calcul de la loi marginale) :

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(t, z - t) dt$$

Dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, $p_{XY}(x, y)$ est à variables séparées et $p_Z(z)$ prend la forme d'un produit de convolution entre $p_X(x)$ et $p_Y(y)$:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(t) p_Y(z - t) dt \quad (1.42)$$

1.8 Somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes

La somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes de même loi tend vers une variable gaussienne. On peut généraliser ce résultat au cas où les variables aléatoires ne sont pas de même loi et partiellement indépendantes. Ce qui justifie l'utilisation des variables aléatoires gaussiennes pour représenter les phénomènes aléatoires relativement complexes.

1.9 Exercices

1.9.1 Variables aléatoires, fonctions de répartition et densités

I. La densité de probabilité d'une variable aléatoire X a pour expression :

$$p_X(x) = \begin{cases} k & \text{pour } x \in [a_1, a_2[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où k est une constante.

- Déterminer la valeur de k .
- Soit $a_1 = -1$ et $a_2 = 2$. Evaluer la proba($|X| \leq 1/2$).

II. La densité de probabilité de X a pour expression :

$$p_X(x) = ke^{-ax}u(x)$$

où a est une constante positive. Déterminer la valeur de la constante k et dessiner $p_X(x)$.

III. La probabilité conjointe de X et Y a pour expression :

$$p_{XY}(x,y) = ke^{-(ax+by)}u(x)u(y)$$

où a et b sont des constantes positives. Déterminer la valeur de k .

IV. La probabilité conjointe de X et Y a pour expression :

$$p_{XY}(x,y) = xy e^{-(x^2+y^2)/2}u(x)u(y)$$

- Evaluer les densités de probabilité marginales $p_X(x)$ et $p_Y(y)$.
- X et Y sont-ils indépendants?

1.9.2 Moyennes statistiques

- I. Soit $Y = aX + b$. Montrer que si la moyenne de X est m_x et sa variance σ_x^2 , alors, $m_y = am_x + b$ et $\sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2$.
- II. En utilisant l'équation 1.39, évaluer et tracer $p_Y(y)$ pour $Y = X^2$, lorsque X suit une loi gaussienne avec $m_x = 0$ et $\sigma_x^2 = 1$.
- III. Calculer la covariance de X et Y :
 - lorsque X et Y sont indépendants.
 - lorsqu'il existe entre X et Y la relation $Y = aX + b$.

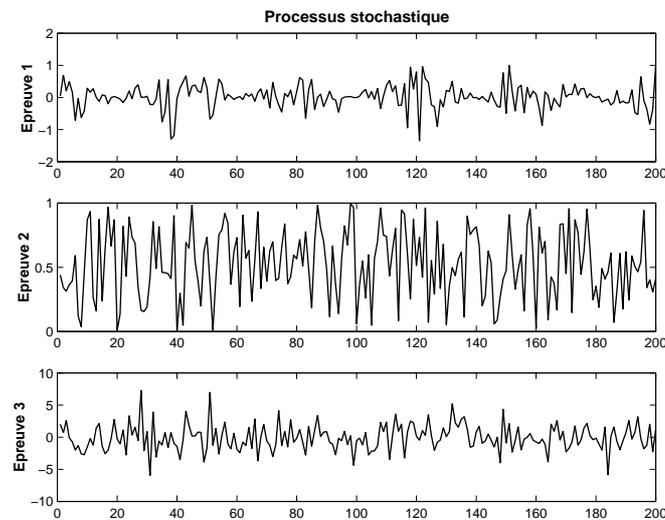
CHAPITRE 2 *Signaux aléatoires*

2.1 Introduction

Il existe de nombreux signaux naturels ou artificiels, comme les signaux de parole issu d'un micro, la consommation d'électricité, un signal binaire de transmission, ou encore la température journalière relevé à midi.

Dans ces exemples, on ne peut pas prédire exactement l'échantillon suivant avant de l'avoir observé. On ne peut donc pas considérer ces signaux comme déterministes ou il est difficile de trouver un modèle mathématique d'évolution, ou les variations fines ne sont pas intéressantes ou le signal est trop important à mémoriser. Pour toutes ces raisons, on modélise ce signal $x(k)$ comme la réalisation d'un processus aléatoire $X(k)$. On ignorera les valeurs instantanées du signal pour s'intéresser aux valeurs statistiques (valeur moyenne, variance, fonction d'autocorrélation,...).

L'analyse spectrale de processus aléatoire fait appel aux valeurs statistiques. Un processus stochastique $X(t)$ est une variable aléatoire indexée par le paramètre continu t alors que le processus $X(t)$ peut-être continu ou discret. Un processus stochastique a une énergie infinie et l'analyse spectrale est obtenue en prenant la TF de la fonction d'autocorrélation, c'est la densité spectrale de puissance. On traitera dans la suite de ce cours, des processus aléatoires stationnaires au second ordre et ergodiques.

FIG. 2.1 – *Processus stochastique*

2.2 Les moments temporels, les relations de base

2.2.1 Moyenne temporelle

On appelle moyenne temporelle, la quantité :

$$\overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

2.2.2 Autocorrélation temporelle

On appelle autocorrélation temporelle, la quantité :

$$\overline{x(t)x(t+\tau)} = \overline{R_{xx}(\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau) dt$$

2.3 Caractéristiques statistiques d'un processus aléatoire

2.3.1 Moyenne statistique

Définition

On appelle moyenne statistique, la quantité E appelé espérance mathématique :

$$E[X(t)] = m_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x,t) dx \quad (2.1)$$

où $p(x,t)$ correspond à la densité de probabilité de la variable aléatoire $X(t)$.

2.3.2 Autocorrélation, autocovariance statistiques

On appelle autocorrélation statistique, la quantité :

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[X(t_1) X(t_2)] = \int \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (2.2)$$

avec $p(x_1, x_2; t_1, t_2)$ la densité de probabilité conjointe des deux variables aléatoires $X(t_1)$ et $X(t_2)$.

On définit également la fonction d'autocovariance statistique par :

$$C_{xx}(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - m_x(t_1)) (X(t_2) - m_x(t_2))] \quad (2.3)$$

ainsi que la variance ($t_1 = t_2$) par $\text{Var}[X(t)] = E[(X(t) - m_x(t))^2] = \sigma^2$

2.4 Stationnarité, Ergodicité

2.4.1 Stationnarité au sens strict

Un processus aléatoire $X(t)$ est dit stationnaire au sens strict si ses propriétés statistiques sont invariantes lorsqu'on change l'origine des temps :

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = p(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + c, t_2 + c, \dots, t_n + c) \quad (2.4)$$

quel que soit c .

2.4.2 Processus aléatoire stationnaire au second ordre

Un processus aléatoire est stationnaire au sens large (au second ordre) ssi :

1. La moyenne $E[X(t)]$ est indépendante du temps :

$$E[X(t)] = m_x = \text{cste}.$$

2. La fonction d'autocorrélation ne dépend que de $\tau = t_2 - t_1$:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(\tau)$$

Dans ce cas la fonction d'autocovariance est donnée par

$$C_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) - m_x^2$$

Dans le cas où $X(t)$ est centré $m_x = 0$ et $R_{xx}(\tau) = C_{xx}(\tau)$

Exemple

Soit $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ un processus aléatoire où A et ω sont déterministes et ϕ est une variable aléatoire équirépartie entre $[0, 2\pi]$. Calculer $E[x(t)]$ ainsi que la fonction d'autocorrélation $R_{xx}(t_1, t_2)$.

2.4.3 Processus ergodique

Un processus aléatoire est ergodique à l'ordre n si les moyennes temporelles jusqu'à l'ordre n sont indépendantes du choix de la réalisation. De plus, si les résultats obtenus à partir des moyennes statistiques sont équivalents à ceux obtenus à partir des moyennes temporelles, alors le processus est ergodique.

Un processus stationnaire du second ordre est ergodique si $R_{xx}(\tau) = \overline{R_{xx}}(\tau)$

2.5 Corrélation

Dans la suite on suppose que les processus stochastiques sont stationnaires au sens large.

2.5.1 Autocorrélation statistique

L'autocorrélation de $X(t)$ a pour valeur,

$$R_{xx}(\tau) = E[X(t)X(t + \tau)] \quad (2.5)$$

Propriétés

Les propriétés de $R_{xx}(\tau)$

- fonction paire, $R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau)$,
- maximum en 0, $|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0) = E[X^2(t)]$,

2.5.2 Intercorrélation statistique

On définit la fonction d'intercorrélation de 2 processus aléatoires stationnaires $X(t)$ et $Y(t)$ par :

$$R_{xy}(\tau) = E[X(t)Y(t + \tau)] \quad (2.6)$$

avec $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$.

Dans le cas où les processus sont ergodiques, on définit

$$R_{xy}(\tau) = \bar{R}_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y(t + \tau) dt$$

Les transformées de Fourier de R_{xy} et de R_{yx} sont appelées densités interspectrales de puissance.

2.5.3 Autocovariance

Dans ce cas la fonction d'autocovariance est donnée par

$$C_{xx}(\tau) = \text{E}[(X(t) - \text{E}[X(t)])(X(t + \tau) - \text{E}[X(t + \tau)])] \quad (2.7)$$

$$C_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) - m_x^2 \quad (2.8)$$

2.5.4 Intercovariance

L'intercovariance de $X(t)$ et $Y(t)$ a pour expression :

$$C_{xy}(\tau) = \text{E}[(X(t) - \text{E}[X(t)])(Y(t + \tau) - \text{E}[Y(t + \tau)])] \quad (2.9)$$

$$C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - m_x m_y \quad (2.10)$$

Les deux processus stochastiques $X(t)$ et $Y(t)$ sont dit mutuellement orthogonaux si $R_{xy}(\tau) = 0$.

Les deux processus stochastiques $X(t)$ et $Y(t)$ sont dit non corrélés lorsque $C_{xy}(\tau) = 0$.

2.6 Analyse spectrale des processus aléatoires

2.6.1 Densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire stationnaire est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation statistique :

$$R_{xx}(\tau) \xrightarrow{\text{TF}} \Gamma_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.11)$$

(relation de Wiener–Khintchine)

La densité interspectrale de puissance Γ_{xy} ou Γ_{yx} correspond à la transformée de Fourier de R_{xy} respectivement R_{yx} .

2.6.2 Le bruit blanc $b(t)$

Parmi les processus aléatoires, le bruit blanc revêt une importance particulière car il représente le modèle de nombreux phénomènes physiques. Le mot blanc prend son origine dans l'analogie avec la lumière blanche, dont la puissance est uniformément répartie sur l'axe des fréquences.

Un bruit blanc $b(t)$ de variance σ_b^2 est un signal aléatoire stationnaire au second ordre centré ($m_b = 0$) dont la fonction d'autocorrélation statistique

$$R_{xx}(\tau) = E[b(t)b(t+\tau)] = \sigma_b^2 \delta(\tau) \quad (2.12)$$

d'où

$$R_{xx}(\tau) \xrightarrow{\text{TF}} \Gamma(f) = \sigma_b^2 \quad (2.13)$$

donc

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(f) df = \infty$$

Le bruit blanc est un signal à énergie et puissance infinie.

2.6.3 Le bruit coloré

Dans de nombreuses applications, les systèmes rencontrés ont une largeur de bande limitée $(-B/2, B/2)$. On modélise souvent le bruit par un processus réel, dont la densité spectrale de puissance est égale à σ_b^2 dans cette bande et nulle partout ailleurs. Sa puissance est alors $B\sigma_b^2$. On parle dans ce cas de bruit coloré.

2.7 Processus aléatoires particuliers

2.7.1 Séquences indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.)

Le modèle le plus simple de suite aléatoire est celui où toutes les variables de la suite ont la même loi et sont indépendantes.

Considérons un processus aléatoire $X(t)$ et définissons n variables aléatoires $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ correspondant à n instants de mesure t_1, t_2, \dots, t_n . On forme un vecteur aléatoire \mathbf{X} ($n \times 1$), qui a pour définition :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \dots \\ X(t_n) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

La loi de probabilité d'une variable aléatoire de \mathbf{X} , prise à un instant n quelconque, est indépendant de n : on dit alors que \mathbf{X} est identiquement distribuée.

Quel que soit le nombre d'instants et quelle que soit la suite des instants les variables aléatoires $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Une telle séquence est désignée par séquence aléatoire i.i.d. (Indépendantes et Identiquement Distribuées).

Le bruit blanc est un exemple de séquence i.i.d. centrée.

2.7.2 Processus aléatoire gaussien

Soit le vecteur aléatoire défini par l'équation 2.14 au paragraphe précédent. Soit \mathbf{x} un vecteur ($n \times 1$) ayant pour définition :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Ce qui permet de noter $\{\mathbf{X} \leq \mathbf{x}\}$ l'événement $\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n\}$. $X(t)$ est par définition, un processus gaussien si \mathbf{X} présente une densité multivariable conjointement gaussienne pour tout ensemble fini de valeur t_i et pour tout n .

La densité multivariable d'un processus gaussien a pour expression :

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\det \mathbf{C}|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m})^t \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \right] \quad (2.16)$$

où \mathbf{t} désigne l'opération de transposition matricielle, \mathbf{m} est le vecteur moyenne, \mathbf{C} est la matrice de covariance, d'expression :

$$\mathbf{m} = \mathbb{E}[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[X(t_1)] \\ \mathbb{E}[X(t_2)] \\ \dots \\ \mathbb{E}[X(t_n)] \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

où $C_{ij} = C_{XX}(t_i, t_j) = R_{XX}(t_i, t_j) - m_i m_j$ expression qui représente la covariance de $X(t_i)$ et $X(t_j)$, tandis que $\det \mathbf{C}$ est le déterminant de la matrice \mathbf{C} . Les propriétés les plus importantes d'un processus gaussien sont énumérées ci-après :

1. un processus gaussien est entièrement défini par l'ensemble de ses moyennes m_i ainsi que par ses fonctions d'autocorrélation $R_{XX}(t_i, t_j)$ avec $i, j = 1, \dots, n$.
2. Si l'ensemble des variables aléatoires $X(t_i)$, ne présentent aucune corrélation, c'est à dire si $C_{ij} = 0$ $i \neq j$, alors les $X(t_i)$ sont indépendants.
3. Si un processus gaussien $X(t)$ est stationnaire au sens large, alors il l'est au sens strict.
4. Si l'on applique un processus gaussien à l'entrée d'un système linéaire, le processus aléatoire en sortie est lui aussi gaussien.

2.8 Filtrage des processus aléatoires

2.8.1 Introduction

On se place dans le cas où les signaux étudiés sont stationnaires au sens large et où le système étudié est linéaire et invariant dans le temps.

On a donc défini un sens à la densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire pour chaque fréquence sans considérer la transformée de Fourier du signal $x(t)$ lui-même, mais la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation.

Attention ceci est un modèle théorique c'est à dire que le calcul de $\Gamma(f)$ a une fréquence nécessite le calcul de l'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$ de $]-\infty, +\infty[$. En pratique :

1. On échantillonne les variables $x(k)$, $R_{xx}(k)$,
 $x(t) \rightarrow x(k) = x(kTe)$: on n'a pas de perte d'information si $x(t)$ a une fréquence max $\leq \frac{f_e}{2}$ (sinon on utilise un filtre antirepliement).
2. on considère un intervalle fini d'observation.

Le problème majeur est qu'il faut considérer que le signal réel est stationnaire sur une longue période. Ceci n'est pas vrai et on dira que le signal est quasi-stationnaire sur la période d'observation de N échantillons. On a seulement des estimés $\hat{R}_{xx}(k)$ de $R_{xx}(k)$ et donc $\Gamma(f)$ sera entaché d'erreur. De plus, on a un nombre fini de valeur de $\hat{R}_{xx}(k)$. Pour toute ses raisons on ne parle plus d'analyse spectrale mais d'estimation spectrale.

2.8.2 Les relations en discret

La fonction d'autocorrélation statistique discrète du processus $X(n)$ aléatoire stationnaire discret est :

$$R_{xx}(k) = E[X(n) X^*(n+k)]$$

avec $k \in]-\infty, +\infty[$

La fonction d'intercorrélation statistique entre deux processus $X(n)$ et $Y(n)$ aléatoires stationnaires est

$$R_{xy}(k) = E[X(n) Y^*(n+k)]$$

La densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire stationnaire est définie par la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation statistique discrète $R_{xx}(k)$

$$\Gamma_{xx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{xx}(k) e^{-j2\pi f k}$$

La densité interspectrale de puissance est :

$$\Gamma_{xy}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{xy}(k) e^{-j2\pi f k}$$

Un bruit blanc discret $b(n)$ de variance σ_b^2 est un processus aléatoire stationnaire, centré, dont les échantillons $b(n)$ ne sont pas corrélés entre eux d'où

$$\begin{aligned} R_{bb}(k) &= \sigma_b^2 \delta(k) \\ \Gamma_{bb}(k) &= \sigma_b^2 \end{aligned}$$

avec $\delta(k) = 1$ pour $k = 0$ et 0 si $k \neq 0$.

2.8.3 Filtre linéaire invariant dans le temps

Soit le signal de sortie $y(n)$ issue d'un système linéaire de réponse impulsionnelle $h(n)$ excité par un signal d'entrée aléatoire $x(n)$. La convolution linéaire s'écrit alors,

$$y(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l) x(n-l) = x(n) * h(n)$$

L'autocorrélation du signal de sortie s'écrit

$$\begin{aligned} R_{yy}(k) &= E[y(n)y^*(n+k)] \\ &= E \left[\left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l) x(n-l) \right) \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} h^*(p) x^*(n+k-p) \right) \right] \\ &= \sum_l h(l) \sum_p h^*(p) R_{xx}(k+n-p-n+l) \\ &= \sum_l h(l) \sum_u h^*(u+l) R_{xx}(k-u) \\ &= \sum_u R_{hh}(u) R_{xx}(k-u) \end{aligned}$$

Finalement on a

$$R_{yy}(k) = R_{hh}(k) * R_{xx}(k) \quad (2.19)$$

Par transformée de Fourier, on obtient

$$\Gamma_{yy}(f) = |H(f)|^2 \Gamma_{xx}(f)$$

Dans le cas où $x(n)$ est un bruit blanc, $R_{xx}(n) = \sigma_b^2 \delta(n)$ alors, $\Gamma_{yy}(f) = \sigma_b^2 |H(f)|^2$.

2.9 Exercices

2.9.1 Stationnarité

I. On considère le processus aléatoire $X(t)$ ayant pour définition :

$$X(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

où A et B sont des VA tandis que ω est une constante.

- Quelle est la condition sur $E[X(t)]$ pour que $X(t)$ soit stationnaire.
- Montrer que $X(t)$ est stationnaire au sens large ssi A et B sont non corrélées et ont même variance.

II. Montrer que si $X(t)$ est stationnaire au sens large, on a la relation suivante :

$$E[(X(t+\tau) - X(t))^2] = 2[R_x(0) - R_x(\tau)]$$

2.9.2 Filtrage

- On définit la fonction d'intercorrélation entre deux signaux aléatoires discrets réels par

$$R_{yx}(k) = E[y(n)x(n-k)]$$

On suppose que le signal $y(n)$ est issu du filtrage de $x(n)$ par un filtre numérique linéaire stationnaire de réponse impulsionnelle $h(n)$.

Donner la relation qui lie $R_{yx}(k)$, $h(n)$ et $R_x(n)$ (fonction de corrélation du signal $x(n)$).

2. On considère un filtre numérique de réponse impulsionnelle $h(n)$ définie par

$$h(n) = \begin{cases} b^n & \text{pour } n \geq 0 \\ 0 & \text{pour } n < 0 \end{cases} \quad \text{avec } 0 < b < 1$$

Le signal d'entrée $x(n)$ est un signal discret stationnaire centré de fonction d'auto-corrélation

$$R_x(k) = a^{|k|} \quad \text{avec } 0 < a < 1$$

On note $y(n)$ le signal de sortie du filtre.

- (a) Préciser pourquoi on a supposé que $0 < b < 1$ et $0 < a < 1$.
 (b) Montrer que la densité spectrale de puissance de $x(n)$ est égale à :

$$S_x(f) = \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos(2\pi f)}$$

- (c) Montrer que la densité spectrale de puissance de $y(n)$ est égale à :

$$S_y(f) = \frac{1}{1 + b^2 - 2b \cos(2\pi f)} S_x(f)$$

- (d) Calculer l'intercorrélation $R_{yx}(k)$.

2.9.3 Processus aléatoires particuliers

Soit \mathbf{X} un vecteur aléatoire gaussien à n composantes indépendantes, selon la relation 2.7.2. Montrer que la fonction de densité conjointe multivariable a pour expression :

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \prod_{i=1}^n \sigma_i} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - m_i}{\sigma_i} \right)^2 \right]$$

où $m_i = E[X_i]$ et $\sigma_i^2 = \text{var}(X_i)$

CHAPITRE 3 *Identification paramétrique*

3.1 La transformée en z

3.1.1 Définition

La transformée en z (bilatérale), $X(Z)$, de $x(n)$ est définie par la relation suivante :

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) Z^{-n} \quad (3.1)$$

Z est une variable complexe et la fonction $X(Z)$ possède un domaine de convergence qui en général est un anneau centrée sur l'origine, de rayons $R1$ et $R2$. C'est dire que $X(Z)$ est définie pour $R1 < |Z| < R2$. Les valeurs de $R1$ et $R2$ dépendent de la suite $x(n)$.

Si la suite $x(n)$ représente la suite des échantillons d'un signal échantillonnés à la période T , la transformation de Fourier de cette suite s'écrit :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi f n T}$$

Ainsi pour $Z = e^{j2\pi f T}$ la transformée en Z de la suite $x(n)$ coïncide avec sa transformée de Fourier. C'est à dire que l'analyse d'un système discret peut se faire avec la transformée en Z et pour connaître la réponse en fréquence, il suffit de remplacer Z par $e^{j2\pi f T}$.

3.1.2 Transformée en z unilatérale

Dans le cas des signaux et systèmes causaux, on utilise la transformée en z unilatérale définie pour $n \geq 0$:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) Z^{-n} \quad (3.2)$$

3.1.3 Fonction de transfert

Dans le cas d'un filtre linéaire, on rappelle que la relation d'entrée ($x(n)$) sortie ($y(n)$) est donnée par le produit de convolution suivant :

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) x(n-i)$$

En prenant respectivement la transformée de Fourier et en z on obtient :

$$Y(f) = H(f)X(f) \quad (3.3)$$

$$Y(Z) = H(Z)X(Z) \quad (3.4)$$

$H(Z)$ est appelée fonction de transfert du filtre et

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-j2\pi fn}$$

est appelé la réponse en fréquence. On note que

$$h(n) = \int_{-1/2}^{1/2} H(f) e^{j2\pi fn} df \quad (3.5)$$

Fonction de transfert d'un système stable

Si le système est stable, alors sa réponse impulsionnelle est absolument sommable :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$$

Cette condition entraîne que l'anneau de convergence doit nécessairement contenir le cercle unité.

Fonction de transfert d'un système causal stable

Si le système linéaire invariant est causal et stable, le cercle unité doit être contenu dans la région de convergence d'un système causal. Par conséquent, pour un système causal et stable, la fonction de transfert converge à l'intérieur d'un cercle dont le rayon est en tout cas plus petit que l'unité. Ainsi, les pôles de la fonction de transfert d'un système linéaire invariant causal et stable doivent se trouver à l'intérieur du cercle unité.

On peut, par la position des pôles dans ce plan, connaître immédiatement si le système est stable ou non.

3.1.4 Systèmes définis par une équation aux différences

Les systèmes linéaires invariants dans le temps, les plus intéressants sont les systèmes où les entrées sorties sont liées par une équation aux différences linéaire à coefficients constants. En effet, d'une part ils correspondent à des réalisations simples et d'autre part ils constituent une excellente modélisation de nombreux systèmes naturels.

Un système de ce type est défini par la relation suivante :

$$y(n) = \sum_{i=0}^N a_i x(n-i) - \sum_{j=1}^M b_j y(n-j) \quad (3.6)$$

En appliquant la transformation en z aux membres de cette équation, on obtient :

$$Y(Z) = \sum_{i=0}^N a_i Z^{-i} X(Z) - \sum_{j=1}^M b_j Z^{-j} Y(Z) \quad (3.7)$$

soit

$$Y(Z) = H(Z)X(Z)$$

avec

$$H(Z) = \frac{a_0 + a_1 Z^{-1} + \dots + a_N Z^{-N}}{1 + b_1 Z^{-1} + \dots + b_M Z^{-M}} \quad (3.8)$$

La fonction de transfert du système $H(Z)$ est une fraction rationnelle. Les a_i et les b_j sont les coefficients du système. Certains coefficients du système peuvent être nuls. Pour faire apparaître la réponse en fréquence, il suffit de remplacer dans $H(Z)$, la variable Z par $e^{j2\pi f}$. En mettant en évidence les racines des deux polynômes, on peut exprimer $H(Z)$ par :

$$H(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)} = a_0 \frac{\prod_{i=1}^N (Z - Z_i)}{\prod_{j=1}^M (Z - P_j)} \quad (3.9)$$

Les Z_i et P_j sont respectivement les zéros et les pôles de la fonction de transfert $H(Z)$.

L'analyse d'un système par sa réponse en fréquence correspond à un fonctionnement en régime permanent; elle est suffisante dans la mesure où les phénomènes transitoires peuvent être négligés. Si ce n'est pas le cas il faut introduire les conditions initiales.

3.1.5 Filtres à réponse impulsionnelle finie

Les filtres numériques à réponse impulsionnelle finie (RIF) sont des systèmes linéaires discrets invariants dans le temps définis par une équation selon laquelle un nombre de sortie, représentant un échantillon du signal filtré, est obtenu par la somme pondérée d'un ensemble fini de nombres d'entrée, représentant les échantillons du signal à filtrer. Les coefficients de la sommation constituent la réponse impulsionnelle du filtre. Ce filtre est du type à mémoire finie, c'est à dire qu'il détermine sa sortie en fonction d'informations d'entrée d'ancienneté limitée.

L'équation d'entrée-sortie est donnée par l'équation :

$$y(n) = \sum_{i=0}^N a_i x(n-i) \quad (3.10)$$

Le filtre ainsi défini comporte un nombre N fini de coefficients a_i . Considéré comme un système discret, il a pour réponse à la suite unitaire la suite $h(i)$ telle que

$$\begin{cases} h(i) = a_i & \text{si } 0 \leq i \leq N-1 \\ h(i) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

C'est à dire que la réponse impulsionnelle est simplement la suite des coefficients.

La fonction de transfert du filtre s'écrit :

$$H(f) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i e^{-2i\pi fT} \quad (\text{TF}) \quad (3.11)$$

$$H(Z) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i Z^{-i} \quad (\text{TZ}) \quad (3.12)$$

La fonction $H(f)$ est une fonction périodique, de période $fe = \frac{1}{T}$. Les coefficients a_i constituent le développement en série de Fourier de cette fonction :

$$\sum_{i=0}^{N-1} |a_i|^2 = \frac{1}{fe} \int_0^{fe} |H(f)|^2 df \quad (3.13)$$

3.1.6 Exemples

Filtre en cosinusoïde

Soit $x(t)$ représenté par ses échantillons $x(nT)$, prélevés à la fréquence $fe = 1/T$. Soit la relation d'entrée sortie suivante :

$$y(nT) = 1/2 [x(nT) + x((n-1)T)]$$

Si $Y(f)$ et $X(f)$ désignent les transformées de Fourier des signaux $y(t)$ et $x(t)$, il vient

$$Y(f) = 1/2 X(f) (1 + e^{-2i\pi fT})$$

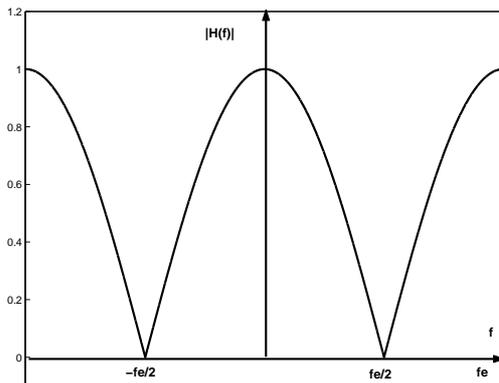
La fonction de transfert s'écrit donc :

$$H(f) = e^{-i\pi fT} \cos(\pi fT)$$

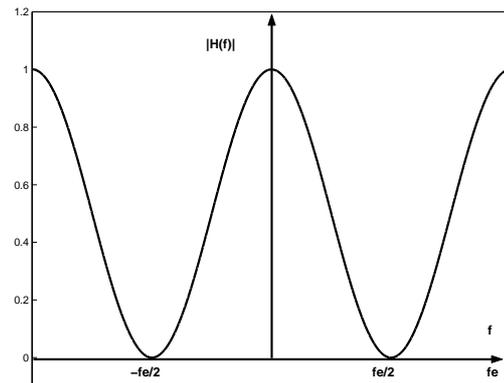
C'est une opération de filtrage, qui conserve la composante continue et élimine la composante à la fréquence $fe/2$. Dans l'expression de $H(f)$, le terme complexe $e^{-2i\pi fT/2}$ caractérise un retard $\tau = T/2$ qui est le temps de propagation du signal à travers le filtre.

La réponse impulsionnelle $h(t)$ qui correspond au filtre de fonction de transfert $|H(f)|$ s'écrit :

$$h(t) = 1/2 [\delta(t + T/2) + \delta(t - T/2)]$$



Filtre en cosinusoïde



Filtre en cosinusoïde surélevée

Filtre en cosinusoïde surélevée

Soit l'équation récurrente suivante :

$$y(nT) = 1/4 [x(nT) + 2x[(n-1)T] + x[(n-2)T]]$$

Comme le filtre précédent, il conserve la composante continue et élimine celle à $fe/2$. Elle correspond à la fonction de transfert :

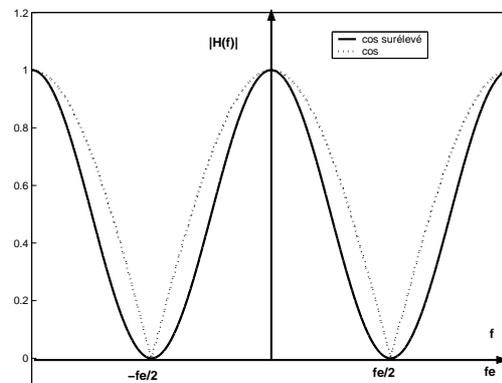
$$H(f) = 1/4(1 + 2e^{-2i\pi f2T} + e^{-2i\pi f2T}) = \frac{e^{-2i\pi fT}}{2}(1 + \cos(2\pi fT))$$

Le filtre obtenu est dit en cosinusoïde surélevée; son temps de propagation est $\tau = T$. La réponse impulsionnelle est donné par :

$$h(t) = 1/4 [\delta(t + T) + 2\delta(t) + \delta(t - T)]$$

Ce filtre est un passe-bas plus sélectif que le précédent et il apparaît clairement que pour

obtenir une fonction de filtrage plus sélective encore il suffit d'augmenter le nombre de termes de la suite $x(nT)$ sur lesquels porte la sommation pondérée.



3.1.7 Filtres à réponse impulsionnelle infinie

Les filtres à réponse impulsionnelle infinie sont des systèmes linéaires discrets invariants dans le temps dont le fonctionnement est régi par une équation de convolution portant sur une infinité de termes. En principe, il conserve une trace des signaux qui leur ont été appliqués pendant une durée infinie, ils sont à mémoire infinie. Une telle mémoire est réalisée par une boucle de réaction de la sortie sur l'entrée. Chaque élément de la suite des nombres de sortie est calculé par sommation pondérée d'un certain nombre d'éléments de la suite d'entrée et d'un certain nombre d'éléments de la suite de sortie précédents.

Le fait d'avoir cette réponse impulsionnelle infinie permet d'obtenir en général des fonctions de filtrage beaucoup plus sélectives que celles des filtres RIF à quantité de calculs équivalente. Cependant la boucle de réaction complique l'étude des propriétés et la conception de ces filtres et amène des phénomènes parasites.

Expression générale

Le filtre RII général a pour expression :

$$y(n) = \sum_{i=0}^N a_i x(n-i) - \sum_{j=1}^M b_j y(n-j) \quad (3.14)$$

La fonction de transfert (en Z) de ce système s'écrit :

$$H(Z) = \frac{a_0 + a_1 Z^{-1} + \dots + a_N Z^{-N}}{1 + b_1 Z^{-1} + \dots + b_M Z^{-M}} \quad (3.15)$$

C'est le quotient de deux polynômes en Z . Les coefficients a_i et b_j étant réels, $H(Z)$ est un nombre complexe.

3.1.8 Comparaison entre les filtres RIF et RII

Les deux types de filtres examinés RIF et RII, permettent de satisfaire un gabarit quelconque donné. La question du choix entre ces deux approches se pose fréquemment au concepteur de systèmes. Le critère est la complexité des circuits à mettre en oeuvre; en pratique la comparaison se ramène principalement à l'évaluation du paramètre simple qui constitue le nombre de multiplications à effectuer.

3.2 Processus aléatoire

L'idée d'utiliser des modèles de filtres pour représenter des processus aléatoires est due à l'origine de Yule (1927). Elle consiste à considérer une suite aléatoire (supposée centrée), comme la sortie d'un filtre linéaire excité par un bruit blanc.

3.2.1 Processus MA

On considère le processus aléatoire (i.i.d.) $x(n)$ comme étant la combinaison linéaire suivante :

$$x(n) = b_0 w(n) + b_1 w(n-1) + \dots + b_M w(n-M) \quad (3.16)$$

où $w(n)$ désigne un processus aléatoire réel, centré, stationnaire, blanc de variance σ_w^2 non corrélé avec $x(n)$ et $\{b_i\}$ une suite de coefficients réels. Le processus ainsi construit apparaît comme la moyenne pondérée des $M+1$ dernières valeurs des entrées par la suite $\{b_i\}$. Pour cette raison, on parle de moyenne mobile, qui se dit en anglais Moving Average (MA). Par

construction, $x(n)$ est la sortie d'un filtre linéaire dont la réponse impulsionnelle est la suite $\{b_i\}$. Ce filtre a donc pour fonction de transfert :

$$H(z) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_Mz^{-M} \quad (3.17)$$

Cette fonction de transfert ne possède pas de pôles. Elle correspond donc à un filtre à réponse impulsionnelle fini (filtre stable). Ce modèle permet de représenter facilement des processus ayant des "vallées" dans leur densité spectrale.

3.2.2 Processus AR

Par définition on dit qu'un processus aléatoire $x(n)$ est AutoRégressif (AR), si $x(n)$ vérifie l'équation récurrente suivante :

$$x(n) + a_1x(n-1) + a_2x(n-2) + \dots + a_Nx(n-N) = w(n) \quad (3.18)$$

$$x(n) = w(n) - a_1x(n-1) - a_2x(n-2) - \dots - a_Nx(n-N) \quad (3.19)$$

où tous les a_i réels. La fonction de transfert du filtre ayant pour sortie la suite $x(n)$ et pour entrée la suite $w(n)$ est donnée par :

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}} \quad (3.20)$$

Ce modèle est tout pôle, il correspond à un filtre à réponse impulsionnelle infinie, il pourra représenter des processus ayant des "pics" dans la densité spectrale. On rappelle qu'un filtre est stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à l'intérieur du cercle unité; l'équation 3.19 admet alors une solution stationnaire unique $x(n)$ qui s'exprime à partir de $w(n)$ de la manière suivante :

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^n h(n-k)w(k) \quad (3.21)$$

où la suite $h_0, h_1, \dots, h_p, \dots$ est la suite des coefficients du développement en série entière de $H(z)$.

Exemple

Soit $x(n) = \sin(\omega_0 nT)$, sa transformée en Z est donné par :

$$X(Z) = \frac{Z \sin(\omega_0 T)}{Z^2 - 2Z \cos(\omega_0 T) + 1} = \frac{Z^{-1} \sin(\omega_0 T)}{1 - 2Z^{-1} \cos(\omega_0 T) + Z^{-2}}$$

La transformée inverse de cette équation est

$$x(n+2) - 2 \cos(\omega_0 T)x(n+1) + x(n) = 0$$

Equation de Yule–Walker

L'équation de Yule–Walker exprime une relation entre les coefficients de l'équation 3.19 et les covariances du processus $x(n)$.

Considérons le processus AR réel d'ordre 1

$$x(n) = -a_1 x(n-1) + w(n)$$

En prenant l'espérance mathématique de cette dernière équation, on trouve que le processus $x(n)$ est centré. En effet,

$$\mathbb{E}[x(n)] + a_1 \mathbb{E}[x(n-1)] = \mathbb{E}[w(n)] \quad (3.22)$$

comme $\mathbb{E}[w(n)] = 0$ (processus centré), il vient que $\mathbb{E}[x(n)] = \mathbb{E}[x(n-1)] = 0$.

Comme le processus $x(n)$ est centré, la fonction d'autocovariance s'exprime par $R(\tau) = \mathbb{E}[x(n)x(n+\tau)]$ et vérifie le système d'équations :

$$\begin{cases} R(0) + a_1 R(1) & = \sigma_w^2 \\ R(-1) + a_1 R(0) & = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

En effet, on obtient ces équations en prenant l'espérance mathématique de $x(n)x(n)$ et $x(n)x(n-1)$ à partir de l'équation .

Le système d'équation peut se mettre sous forme matricielle $\mathbf{R}\mathbf{A} = \mathbf{c}$, où on a posé $\mathbf{A} = [1 \ a_1]^t$ et $\mathbf{c} = [\sigma_w^2 \ 0]^t$ et :

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(1) \\ R(-1) & R(0) \end{bmatrix}$$

Partant de système d'équations, on peut en déduire a_1 et σ_w^2 par :

$$a = -\frac{R(1)}{R(0)} \quad \text{et} \quad \sigma_w^2 = R(0) - \frac{R^2(1)}{R(0)} \quad (3.24)$$

Généralisation

Ces équation se généralisent au cas d'un modèle AR d'ordre N dont la fonction d'autocovariance vérifie le système matriciel :

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(1) & \dots & R(N) \\ R(-1) & R(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R(1) \\ R(-N) & \dots & R(-1) & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Comme $x(n)$ est réel, cette matrice est symétrique. Elle dépend de $N(N+1)/2$ valeurs de la fonction d'autocovariance, de plus, elle possède une forme particulière appelé matrice de Toëplitz.

3.2.3 Processus ARMA

Les processus ARMA s'obtiennent en mettant en série une structure AR et une structure MA. Soit l'équation récurrente :

$$x(n) + a_1x(n-1) + \dots + a_Nx(n-N) = b_0w(n) + b_1w(n-1) + \dots + b_Mw(n-M) \quad (3.26)$$

L'équation du filtre est donné par l'équation 3.15.

On montre que cette équation récurrente admet une solution $x(n)$, stationnaire au second ordre, unique, qui s'exprime en fonction de $w(n)$, si et seulement si les racines du dénominateur, qui sont les pôles de la fonction de transfert, sont de modules inférieur à 1.

3.3 Application à la prédiction linéaire

3.3.1 Définitions

Prédicteur à un pas d'ordre p

Par définition le prédicteur à un pas, d'ordre p cherche à prédire le signal à l'instant n , connaissant le signal aux instants $n - 1, n - 2, \dots, (n - p)$.

$$\hat{x}(n|n-1) = - \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) \quad (3.27)$$

Prédicteur à deux pas d'ordre p

Un prédicteur à deux pas d'ordre p serait la valeur prédite à l'instant n à partir des valeurs aux instants $n - 2, \dots, (n - p)$.

Prédicteur à α pas d'ordre p

$$\hat{x}(n|n-\alpha) = - \sum_{k=1}^p a_k x(n-\alpha+1-k)$$

Erreur de prédiction

On définit l'erreur de prédiction par :

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n|n-1) \quad (3.28)$$

Dans le cas où $e(n)$ est un bruit blanc alors

$$x(n) = - \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + e(n)$$

$x(n)$ sera alors un processus AR. Le problème est de connaître les coefficients a_k connaissant les mesures de x .

Pour déterminer les paramètres, il faudrait inverser la matrice d'autocovariance (eq. 3.25) qui est symétrique. Il existe dans la littérature des algorithmes permettant de s'affranchir

de cette inversion. L'algorithme de Levinson en est un exemple.

Algorithme de Levinson

Il consiste à calculer de manière récursive des prédicteurs à un pas d'ordre croissant.

En considérant tout d'abord une matrice 2×2 :

$$\begin{pmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient facilement :

$$a_1^1 = -\frac{R_{xx}(1)}{R_{xx}(0)}$$

$$P_1 = (1 - a_1^1(a_1^1)^*)$$

où $P(0) = R_{xx}(0)$ et P_1 est la puissance (ou variance) de l'erreur de prédiction et a_1^1 est le coefficient de réflexion. Il pour caractéristique d'avoir un module inférieur à l'unité.

L'algorithme de Levinson s'écrit alors sous la forme générale :

$$\begin{cases} P_0 = R_{xx}(0) \\ k_i = -\frac{[R_{xx}(i) + \sum_{j=1}^{i-1} a_j^{i-1} R_{xx}(i-j)]}{P_{i-1}} \\ a_i^i = k_i \\ a_j^i = a_j^{i-1} + k_i (a_{i-j}^{i-1})^*, 1 \leq j \leq i-1 \\ P_i = (1 - |k_i|^2) P_{i-1} \end{cases} \quad (3.29)$$

où i et j correspondent respectivement à l'ordre et au pas.

3.3.2 Exemple

On cherche à déterminer un prédicteur à 1 pas.

$$x(n) = A \cos(n\omega_0 T + \phi)$$

ϕ est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, 2\pi]$.

$$R_{xx}(k) = \frac{A^2}{2} \cos(k\omega_0 T)$$

Méthode directe

Prédicteur à 1 pas d'ordre 1

Le prédicteur à 1 pas s'écrit $\hat{x}(n|(n-1)) = a_1^1 x(n-1)$.

L'erreur de prédiction est égale à $e = x(n) - \hat{x}(n|(n-1)) = x(n) - a_1^1 x(n-1)$

La variance de l'erreur de prédiction est donnée par $V = E[(x(n) - a_1^1 x(n-1))^2]$

La meilleure valeur du coefficient a_1^1 est celle qui rend V minimale.

$$\begin{aligned} V &= E[x^2(n) - 2a_1^1 x(n)x(n-1) + (a_1^1)^2 x(n-1)^2] \\ V &= R_{xx}(0) - 2a_1^1 R_{xx}(1) + (a_1^1)^2 R_{xx}(0) \end{aligned}$$

On cherche $\frac{\partial V}{\partial a_1^1} = 0$:

$$\begin{aligned} -2R_{xx}(1) + 2a_1^1 R_{xx}(0) &= 0 \\ a_1^1 &= \frac{R_{xx}(1)}{R_{xx}(0)} = \cos(\omega_0 T) \end{aligned}$$

La variance dans ce cas vaut : $V = \frac{A^2}{2} \sin^2(\omega_0 T) \leq \frac{A^2}{2}$

Prédicteur à 1 pas d'ordre 2

Le prédicteur à 2 pas s'écrit $\hat{x}(n|(n-1)) = a_1^2 x(n-1) + a_2^2 x(n-2)$.

L'erreur de prédiction : $\varepsilon(n) = x(n) - \hat{x}(n|(n-1)) = x(n) - a_1^2 x(n-1) - a_2^2 x(n-2)$

La variance de l'erreur de prédiction :

$$V = E[(x(n) - a_1^2 x(n-1) - a_2^2 x(n-2))^2]$$

On détermine les coefficients a_i^2 par la minimisation de variance pour chaque coefficients.

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial a_1^2} &= \text{E}[-x(n-1)(x(n) - a_1^2 x(n-1) - a_2^2 x(n-2))] = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial a_1^2} &= R_{xx}(1) - a_1^2 R_{xx}(0) - a_2^2 R_{xx}(1) = 0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial a_2^2} &= \text{E}[-x(n-2)(x(n) - a_1^2 x(n-1) - a_2^2 x(n-2))] = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial a_2^2} &= R_{xx}(2) - a_1^2 R_{xx}(1) - a_2^2 R_{xx}(0) = 0\end{aligned}$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{pmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx}(1) \\ R_{xx}(2) \end{pmatrix}$$

Ce qui équivaut à :

$$\mathbf{R} \mathbf{a} = \mathbf{r}$$

Pour déterminer les coefficients a_i^2 , il suffit d'inverser la matrice \mathbf{R} ; on obtient alors :

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}$$

avec $R_{xx}(0) = \frac{A^2}{2}$, $R_{xx}(1) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 T)$, $R_{xx}(2) = \frac{A^2}{2} \cos(2\omega_0 T)$,

On trouve :

$$\begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin^2(\omega_0 T)} \begin{pmatrix} 1 & -\cos(\omega_0 T) \\ -\cos(\omega_0 T) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 T) \\ \cos(2\omega_0 T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos(\omega_0 T) \\ -1 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Levinson

Prédicteur à 1 pas d'ordre 1

 $i = 1$

$$\begin{aligned}
 k_1 &= -\frac{R_{xx}(1)}{R_{xx}(0)} = \cos(\omega_0 T) \\
 a_1 &= k_1 = -\cos(\omega_0 T) \\
 P_0 &= R_{xx}(0) = \frac{A^2}{2} \\
 P_1 &= (1 - (k_1)^2)P_0 = (1 - \cos(\omega_0 T))\frac{A^2}{2}
 \end{aligned}$$

 $i = 2$

$$\begin{aligned}
 k_2 &= -\left[\frac{R_{xx}(2) + a_1^1 R_{xx}(0)}{P_1}\right] = 1 \\
 P_2 &= (1 - 1)P_1 = 0 \\
 a_2^2 &= k_2 = 1 \\
 a_1^2 &= a_1^1 + k_2 a_1^1 = -2 \cos(\omega_0 T)
 \end{aligned}$$

CHAPITRE 4

Eléments de la théorie de l'estimation

4.1 Propriétés des estimateurs

4.1.1 Introduction

Soit $X(k)$ un séquence aléatoire i.i.d. stationnaire et ergodique dont on considère N échantillons. Chaque échantillon $x(k)$ est une V.A. ayant une densité de probabilité $p[X(k)]$.

Soit α un paramètre du processus aléatoire, par exemple la moyenne, la variance, la fonction d'autocorrélation... On note $\hat{\alpha}$ l'estimation de ce paramètre :

$$\hat{\alpha} = F [X(0), X(1), \dots, X(N - 1)]$$

Comme $\hat{\alpha}$ s'exprime en fonction des V.A., $\hat{\alpha}$ est une V.A. de densité de probabilité $p_{\hat{\alpha}}(\hat{\alpha})$. F est appelé un estimateur.

4.1.2 Biais et variance

On peut avoir plusieurs estimateurs du même paramètre α et on privilégiera celui dont la proba[$\hat{\alpha}$ voisin α] soit la plus grande possible. On mesurera donc, le biais et la variance de l'estimateur.

- Le biais d'un estimateur est défini par

$$B = E[\hat{\alpha}] - \alpha$$

Si $B=0$ on dit que l'estimateur est non biaisé.

- L'erreur quadratique moyenne est donnée par

$$\text{Eqm} = \text{E}[(\hat{\alpha} - \alpha)^2]$$

- La variance d'un estimateur est définie par

$$\text{var} = \text{E}[(\hat{\alpha} - \text{E}(\hat{\alpha}))^2]$$

On cherche à obtenir une variance la plus faible possible.

Si le biais et la variance tendent vers 0 lorsque le nombre d'observations N tend vers l'infinie alors on parle d'estimateur consistant.

4.1.3 Exemple : estimateur de la moyenne

On a N échantillons d'un signal aléatoire $x(n)$ stationnaire. On donne un estimateur de sa valeur moyenne $m = \text{E}[x(n)]$, \hat{m} tel que

$$\hat{m} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

On suppose que $x(n)$ est une séquence i.i.d.

On cherche à déterminer le biais et la variance de cet estimateur.

- Le biais : $B = \text{E}[\hat{m}] - m$

$$\text{E}[\hat{m}] = \text{E}\left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\right] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \text{E}[x(n)] = m$$

Donc $B = 0$, est un estimateur non biaisé.

- La variance : $\text{var} = \text{E}[(\hat{m} - \text{E}(\hat{m}))^2]$

$$\text{var} = \frac{1}{N} \sigma_x^2$$

Comme B et var tendent vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$ alors, \hat{m} est un estimateur non biaisé consistant.

4.2 Méthodes d'estimation de paramètres de signaux

On suppose que les paramètres sont déterministes.

4.2.1 Méthode du maximum de vraisemblance

Soit $p(y_0, y_1, \dots, y_N; \underline{\theta})$ la densité de probabilité des N variables aléatoires $y(n)$, en fonction du vecteur de paramètres $\underline{\theta}$ à L composantes.

La fonction p a deux interprétations. Avant l'observation des N variables $y(n)$, elle représente la densité de probabilité conjointe de ces variables pour des valeurs spécifiques des paramètres $\underline{\theta}$. Après l'observation, les variables $y(n)$ sont connues, mais les paramètres $\underline{\theta}$ sont inconnus. La fonction des L paramètres qu'on obtient en substituant les valeurs observées $y(n)$ dans p est appelée fonction de vraisemblance des paramètres $\underline{\theta}$. Les valeurs $\hat{\underline{\theta}}$ pour lesquelles la fonction de vraisemblance est maximum sont des valeurs préférentielles, car elles rendent maximum la probabilité d'obtenir les valeurs observées $y(n)$. Les estimateurs à vraisemblance maximum conduisent à une erreur quadratique moyenne minimum pour des grandes valeurs de N .

Exemple : estimation de la moyenne et de la variance d'une variable aléatoire gaussienne

Soit N échantillons statistiquement indépendant d'un signal gaussien $x(n)$, de moyenne m_x et de variance σ_x^2 . La densité de probabilité $p(x_1, x_2, \dots, x_N; m_x, \sigma_x^2)$ est donnée par :

$$p(x_1, \dots, x_N; m_x, \sigma_x^2) = p(x_1; m_x, \sigma_x^2) p(x_2; m_x, \sigma_x^2) \dots p(x_N; m_x, \sigma_x^2) \quad (4.1)$$

$$p(x_1, \dots, x_N; m_x, \sigma_x^2) = \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(\frac{-[x(n) - m_x]^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad (4.2)$$

$$p(x_1, \dots, x_N; m_x, \sigma_x^2) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \frac{1}{\sigma_x^N} \prod_{n=1}^N \exp\left(\frac{-[x(n) - m_x]^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad (4.3)$$

$$(4.4)$$

On cherche à partir des observations $x(n)$ à estimer la moyenne et la variance du signal aléatoire par la méthode du maximum de vraisemblance.

Quelque fois il est plus commode de chercher le maximum du logarithme de la fonction de vraisemblance. Ceci ne modifie en rien les résultats, étant donné que le logarithme est une fonction monotone.

$$\log(p(x_1, \dots, x_N; m_x, \sigma_x^2)) = -\frac{N}{2} \log(2\pi) - N \log(\sigma_x) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{(x(n) - m_x)^2}{\sigma_x^2} \quad (4.5)$$

Estimation de la moyenne

La dérivée partielle de la fonction de vraisemblance par rapport à m_x est donnée par :

$$\frac{\partial \log(p(x_1, \dots, x_N; m_x, \sigma_x^2))}{\partial m_x} = \sum_{n=1}^N \frac{(x(n) - m_x)}{\sigma_x^2}$$

Pour obtenir l'estimation de la moyenne il faut trouver la valeur \hat{m}_x qui annule cette dérivée.

On trouve alors

$$\frac{\partial \log(p(x_1, \dots, x_N; m_x, \sigma_x^2))}{\partial m_x} = 0 \quad (4.6)$$

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n) \quad (4.7)$$

Estimation de la variance

$$\frac{\partial \log(p(x_1, \dots, x_N; m_x, \sigma_x^2))}{\partial \sigma_x} = -\frac{N}{\sigma_x} + \sum_{n=1}^N \frac{(x(n) - m_x)^2}{\sigma_x^3}$$

$$\frac{\partial \log(p(x_1, \dots, x_N; m_x, \sigma_x^2))}{\partial \sigma_x} = 0 \quad (4.8)$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x(n) - \hat{m}_x)^2 \quad (4.9)$$

4.2.2 Méthode des moindres carrées

Soit $y(n)$ la séquence aléatoire modélisée par la fonction $\hat{y}(n) = h(n, \theta)$. L'estimation des paramètres θ par les moindres carrés revient à minimiser l'erreur quadratique moyenne.

$$e(n) = y(n) - h(n, \theta)$$

donc $\hat{\theta} = \text{Arg min}_{\theta} \sum_{n=0}^N e^2(n)$

Exemple : estimation des paramètres d'un modèle linéaire

Soit le modèle suivant :

$$y(n) = \sum_{i=0}^P a_i x(n-i) + e(n)$$

Les données observées sont représentées par les $y(n)$. La séquence d'entrée du système correspond à la séquence $x(n)$. On cherche à estimer les paramètres a_i . $e(n)$ représentent les erreurs de modélisations ($e(n) = y(n) - \hat{y}(n)$).

En utilisant l'écriture matricielle on obtient :

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{X}_n \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}_n$$

On applique la méthode des moindres carrés. L'erreur quadratique moyenne s'écrit $\mathbf{e}_n^t \mathbf{e}_n$.

$$\text{Eqm} = (\mathbf{y}_n - \hat{\mathbf{y}}_n)^t (\mathbf{y}_n - \hat{\mathbf{y}}_n) \quad (4.10)$$

$$\text{Eqm} = \mathbf{y}_n^t \mathbf{y}_n - \mathbf{y}_n^t \mathbf{X}_n \theta - \theta^t \mathbf{X}_n^t \mathbf{y}_n + \theta^t \mathbf{X}_n^t \mathbf{X}_n \theta \quad (4.11)$$

$$(4.12)$$

On cherche le vecteur θ noté $\hat{\theta}$ qui minimise l'Eqm¹.

$$\frac{\partial \text{Eqm}}{\partial \theta} = -\mathbf{X}_n^t \mathbf{y}_n - \mathbf{X}_n^t \mathbf{y}_n + 2\mathbf{X}_n^t \mathbf{X}_n \theta = 0$$

donc

$$\hat{\theta} = (\mathbf{X}_n^t \mathbf{X}_n)^{-1} \mathbf{X}_n^t \mathbf{y}_n$$

1. Rappels mathématique: $\frac{\partial b^t \gamma}{\partial \gamma} = \frac{\partial \gamma^t b}{\partial \gamma} = b$ et $\frac{\partial \gamma^t b \gamma}{\partial \gamma} = 2b\gamma$

□

Bibliographie

- [1] T. Pitarque. *Cours de traitement du signal*. Ecole Supérieur d'Ingénieur de Nice Sophia-Antipolis (ESINSA), 1999.
- [2] Y. Laprie. *Cours: Analyse spectrale de la parole*. www.loria.fr/laprie, 2002.
- [3] J. Le Roux. *Notions élémentaires de probabilités utilisées en traitement du signal*. Ecole Supérieur en Sciences Informatiques (ESSI), 2000.
- [4] C. Gasquet and P. Witomski. *Analyse de Fourier et applications*. Dunod – BU IUP, 1990.
- [5] Hwei P. Hsu. *Communication analogiques et numériques*. Série Schaum, 1994.
- [6] P. Lecoy. *Technologie des télécoms*. 2nd édition, Hermes, 1999.
- [7] J.-M. Brossier. *Signal et communication numérique: égalisation et synchronisation*. Hermes, 1997.
- [8] G. Blanchet and M. Charbit. *Traitement numérique du signal: simulation sous Matlab*. Hermes, 1998.
- [9] A. Quinquis. *Le traitement du signal sous Matlab*. Hermes, 2000.
- [10] M. Bellanger. *Traitement numérique du signal*. Dunod, 1998.
- [11] M. Kunt. *Traitement numérique des signaux*. Dunod, 1981.
- [12] Cl. Vloeberghs. *Compléments de techniques de télécommunications*. Ecole royale militaire, 1999, 3ème édition.
- [13] Calliope. *La parole et son traitement automatique*. Masson.
- [14] P. Alluin. *Production, perception, analyse et reconnaissance de la parole*. <http://philduweb.free.fr/parole/PRParole.htm>, 2001.
- [15] L. R. Rabiner and R. W. Schafer. *Digital processing of speech signals*. Prentice-Hall.